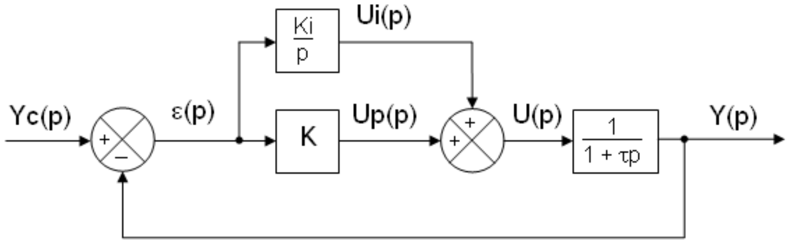
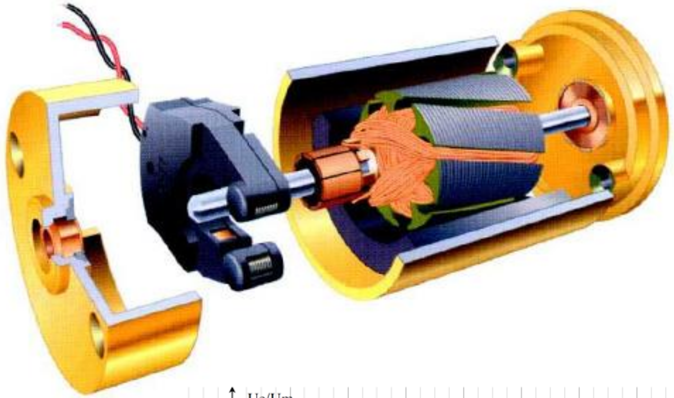
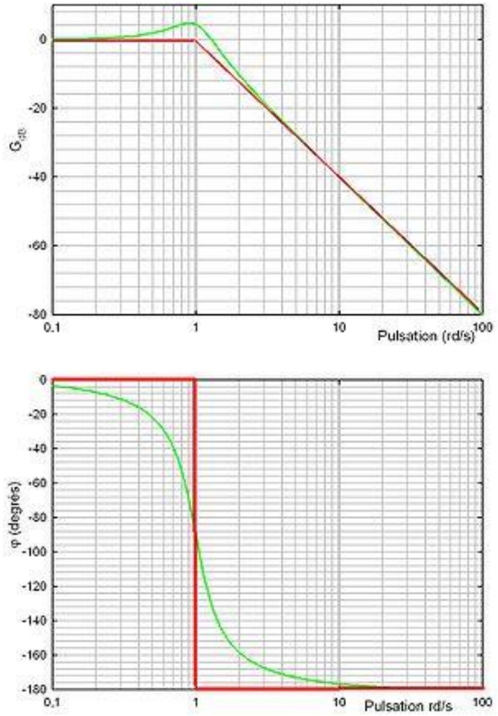
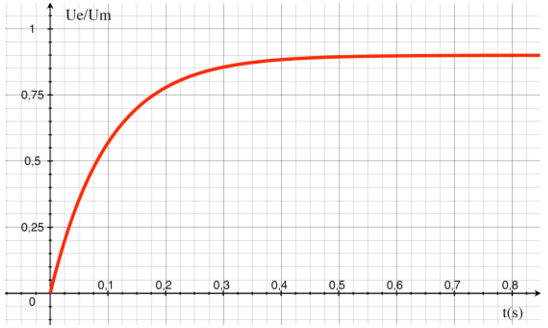
AUTOMATIQUE









4_Réponses fréquentielles

Compétences attendues :

- ✓ Etablir un modèle de comportement à partir d’une réponse temporelle ou fréquentielle. ⇆ I
- ✓ Déterminer la réponse fréquentielle. ⇆ I
- ✓ Simplifier un modèle.
- ✓ Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- ✓ Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
- ✓ Déterminer les performances d’un système asservi.
- ✓ Analyser un algorithme. ⇆ I

Notion d'analyse fréquentielle

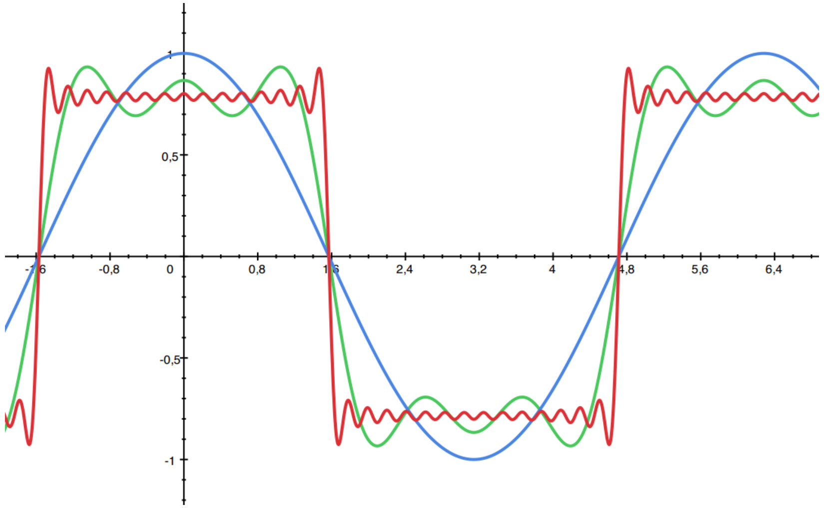
Eléments de la théorie de Fourier

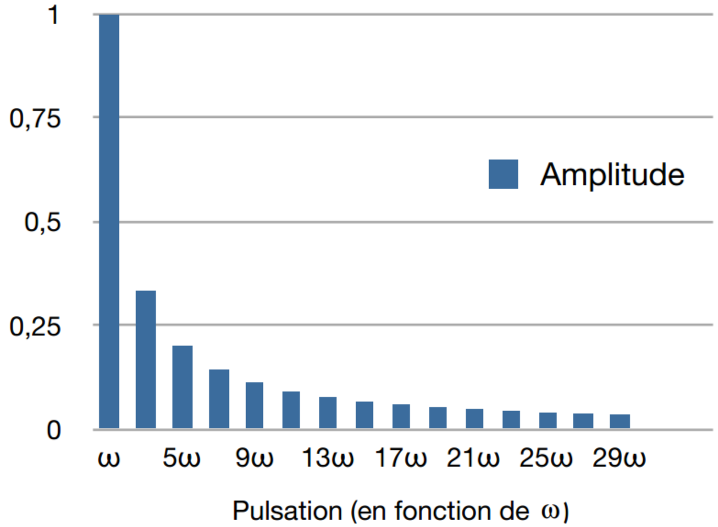
La théorie développée par Fourier (1768-1837) met en avant le fait que **tout signal continu périodique peut s'écrire comme la somme de signaux sinusoïdaux d'amplitudes et de fréquences différentes.**

<u>Exemple :</u> le signal créneau

$$f(t) = \cos(\omega t) - \frac{\cos(3\omega t)}{3} + \frac{\cos(5\omega t)}{5} - \frac{\cos(7\omega t)}{7} + \frac{\cos(9\omega t)}{9} + \cdots$$

Où $f(t)$ est la fonction approchante et ω la pulsation du signal ($\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec T la période du créneau).





Notion d’analyse fréquentielle

Objectifs de la leçon

Objectif du cours → **caractérisation des performances d'un système dans le domaine fréquentiel**.

Réponse de systèmes à une entrée sinusoïdale simple : $e(t) = e_0 \sin(\omega t)$

Intérêt → caractériser les performances des SLCI (précision, rapidité, amortissement et stabilité) → comparer au CdCF.

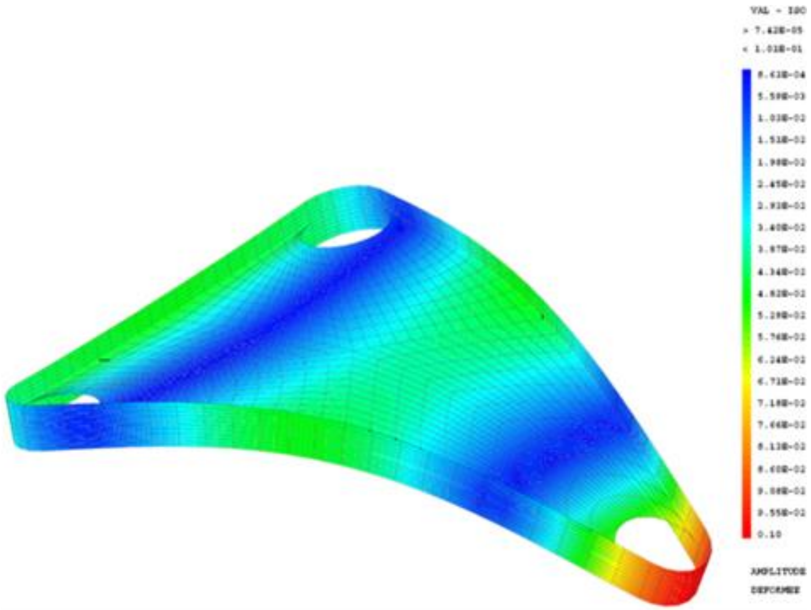
Domaine de Laplace → **Etudier un système et ses performances revient à étudier sa fonction de transfert**.

Notion d’analyse fréquentielle

Exemples d’application

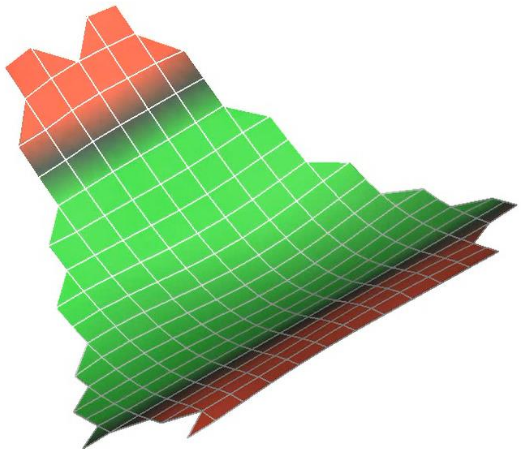
A

B

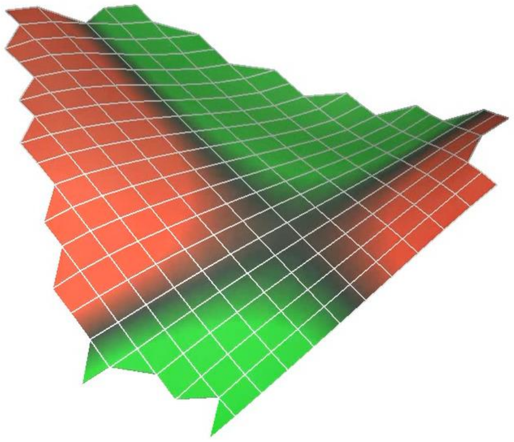
C


Notion d'analyse fréquentielle

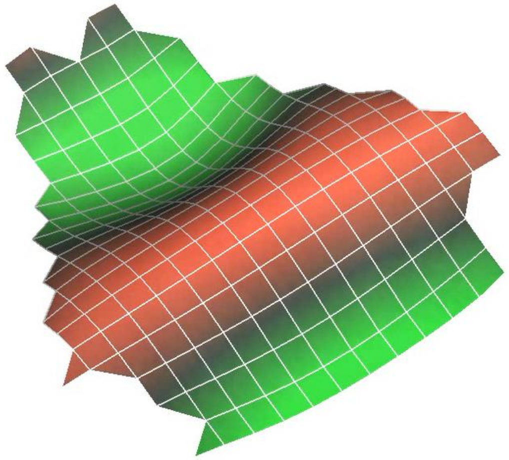
Exemples d'application



718 Hz



874 Hz



1321 Hz

Réponse d'un système à une entrée sinusoïdale

Système du premier ordre

Equation différentielle :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$

Réponse d'un système à une entrée sinusoïdale

Système du premier ordre

Entrée sinusoïdale : $e(t) = e_0 \sin(\omega t)$ → Laplace :

$$E(p) = e_0 \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

D'où

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{K}{1+\tau p}\frac{e_0\omega}{p^2+\omega^2} \xrightarrow{\text{D.E.S.}} S(p) = \frac{A}{1+\tau p} + \frac{Bp+c}{p^2+\omega^2}$$

$$= \frac{Ke_0}{\tau^2\omega^2+1}\left[\frac{\tau^2}{1+\tau p} + \frac{1-\tau p}{p^2+\omega^2}\right]$$

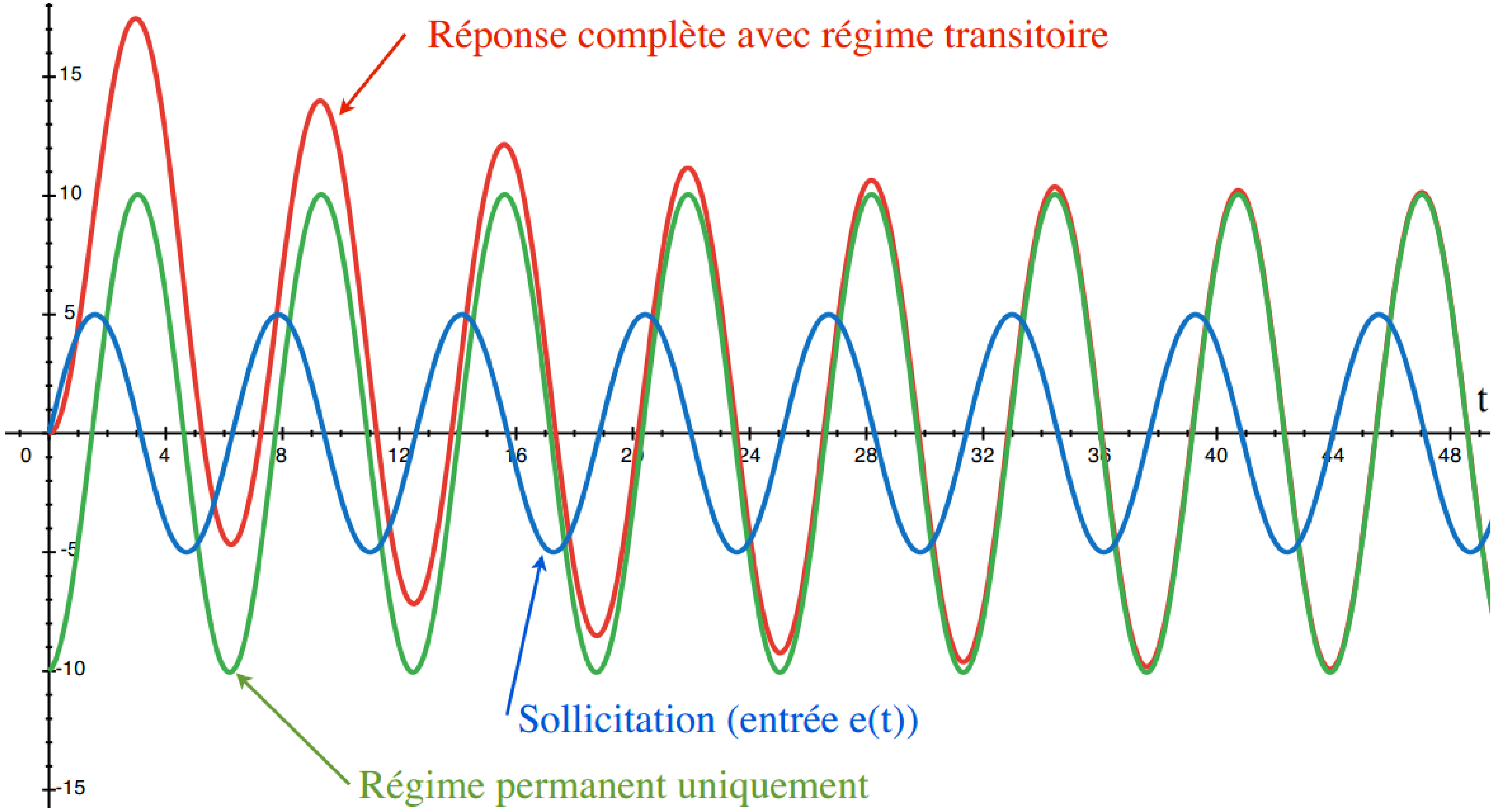
On obtient :

$$\boldsymbol{s(t) = [\frac{Ke_0\tau\omega}{\tau^2\omega^2+1}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{Ke_0}{\tau^2\omega^2+1}\sin(\omega t+\varphi)]u(t)}$$

Réponse d’un système à une entrée sinusoïdale

Système du premier ordre

$$s(t) = [\frac{Ke_0\tau\omega}{\tau^2\omega^2+1}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{Ke_0}{\tau^2\omega^2+1}\sin(\omega t+\varphi)]u(t)$$

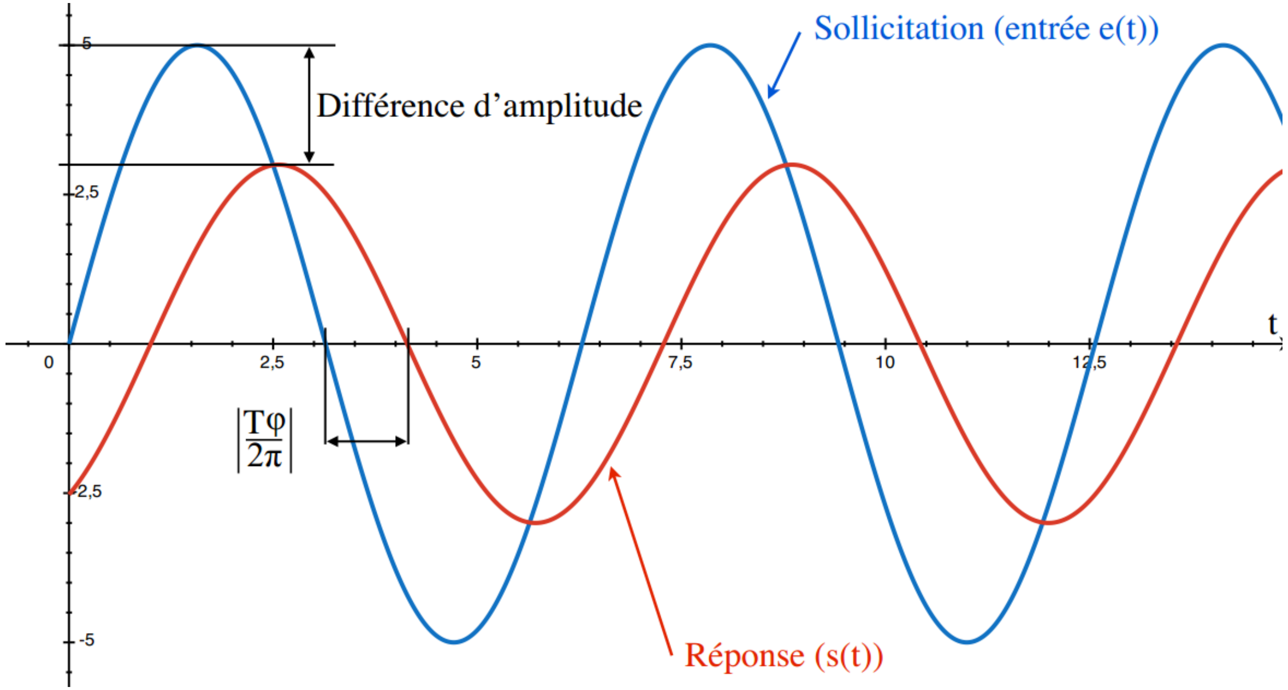


Réponse d'un système à une entrée sinusoïdale

Généralisation

ENTREE → $e(t) = e_0 \sin(\omega t)$ ⇒ **REPONSE (en régime permanent)** → $s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$

- même fréquence ω que l'entrée
- mais déphasage φ



Réponse d'un système à une entrée sinusoïdale

Généralisation

Notation complexe :

$$\underline{e}(t) = e_0 e^{j\omega t} \;\; et \;\; \underline{s}(t) = s_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Equation différentielle générale :

$$a_n.\frac{d^n s(t)}{dt^n} + \cdots + a_0.s(t) = b_m.\frac{d^m e(t)}{dt^m} + \cdots + b_0.e(t)$$

On a alors :

$$(a_n(j\omega)^n + \cdots + a_0)s(t) = (b_m(j\omega)^m + \cdots + b_0)e(t)$$

D'où

$$\frac{\underline{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{t})}{\underline{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t})} = \frac{\boldsymbol{b_m(j\omega)^m + \cdots + b_0}}{\boldsymbol{a_n(j\omega)^n + \cdots + a_0}} = \underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \frac{\boldsymbol{s_0}}{\boldsymbol{e_0}}\boldsymbol{e^{j\varphi}}$$

Réponse d'un système à une entrée sinusoïdale

Généralisation

<u>Définition :</u> On appelle $\underline{H}(j\omega)$la **fonction de transfert harmonique du système**, avec :

$$\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$$

$\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega})$ **est donc un nombre complexe, dépendant de $\boldsymbol{\omega}$.** On note :

- **$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega})$ son module, appelé gain : $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega}) = \left|\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega})\right| = \frac{\boldsymbol{s_0}}{\boldsymbol{e_0}}$**
- **$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\omega})$ son argument, appelé déphasage : $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{Arg}(\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}))$**

<u>Remarque importante :</u> L'expression de $\underline{\boldsymbol{H}}(j\omega)$ est **identique** à celle de **H(p)** pour un système donné si l'on **échange p et jω**.

Outils de représentation

Diagrammes de **Bode**, Black et Nyquist pour représenter graphiquement le **module** $\boldsymbol{G_{dB}(\omega)}$ et l'argument $\boldsymbol{\varphi(\omega)}$.

Outils de représentation

Les grandeurs

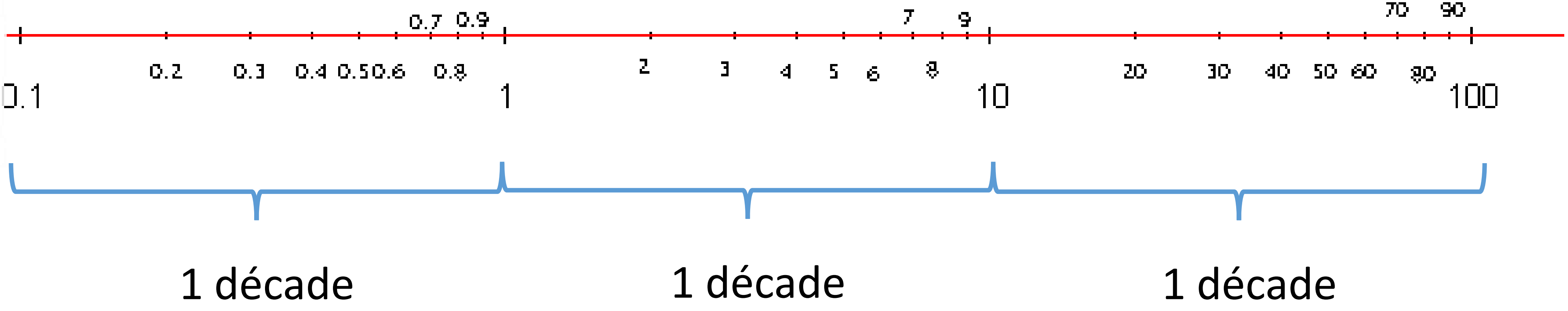
Amplitude des variations de $\underline{H}(j\omega)$ → extrêmement élevée → **gain en décibel** (G_{dB}) :

$$G_{dB}\left(\underline{H}(j\omega)\right) = 20\log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right)$$

Outils de représentation

Les échelles

Echelles logarithmiques (en logarithme décimal, noté *log*) pour graduer les axes de ces courbes.



Rappels mathématiques :

$$\log_{10}(A) = \frac{\ln(A)}{\ln(10)}, \quad \log(1) = 0, \quad \log(10) = 1, \quad \log(10^n) = n$$

La fonction *log* est définie sur $]0\,;+\infty[$ et est strictement croissante, avec $log(\,]0\,;+\infty[\,) = \mathbb{R}$.

Diagrammes de Bode

DEUX DIAGRAMMES :

- **Variation du gain en décibel G_{dB}** (diagramme de module ou diagramme du gain, exprimé en décibel)

- **Variation de la phase $\varphi(\omega)$** en degré ou radian (diagramme de phase)

en fonction de la pulsation ω (en rad/s) tracée sur une échelle logarithmique.

Diagrammes de Bode

Diagramme de gain

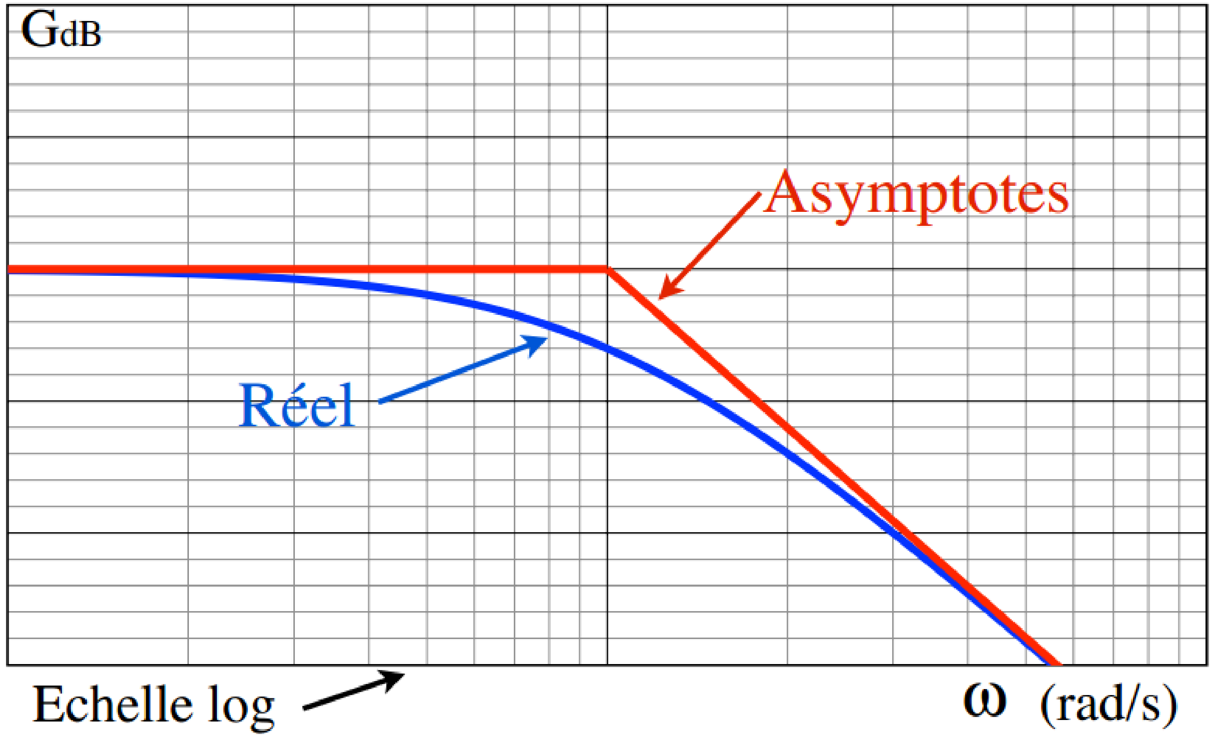
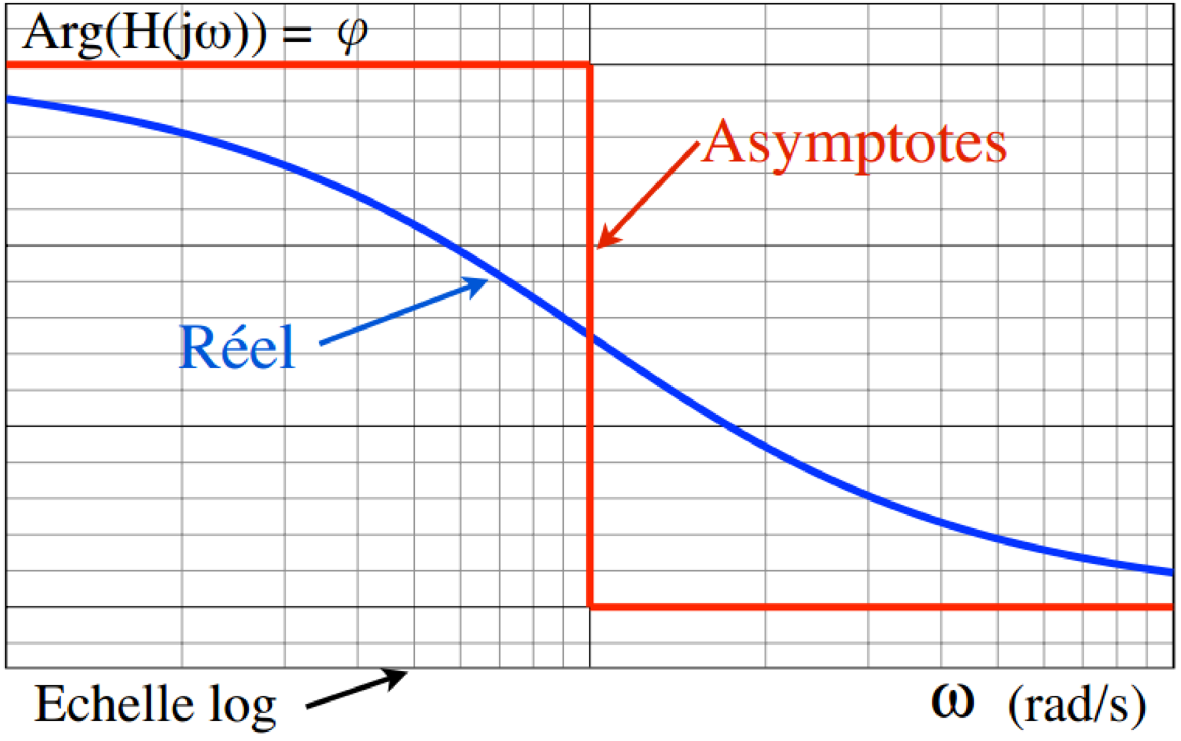


Diagramme de phase



<u>Remarque :</u> On se contente dans la majorité des cas d'un **tracé asymptotique**

Diagrammes de Bode

Propriété

Propriété : Si H(jω) = F(jω) x G(jω) → Tracé graphique de H(jω) → Addition des graphes de F(jω) et G(jω).

Démonstration :

$$G_{dB}\big(H(j\omega)\big) = 20\log(|H(j\omega)|) = 20\log(|F(j\omega).G(j\omega)|)$$

$$G_{dB}\big(H(j\omega)\big) = 20[\log(|F(j\omega)|) + \log(|G(j\omega)|)]$$

$$G_{dB}\big(H(j\omega)\big) = G_{dB}\big(F(j\omega)\big) + G_{dB}\big(G(j\omega)\big)$$

Et

$$Arg\big(H(j\omega)\big) = Arg\big(F(j\omega).G(j\omega)\big) = Arg\big(F(j\omega)\big) + Arg\big(G(j\omega)\big)$$

Diagrammes de Bode

Réponses harmoniques de systèmes simples

Systèmes à action proportionnelle

FT → système à action proportionnelle (s(t) = Ke(t), avec K > 0) → $H(j\omega) = K$.

On a alors :

- $G_{dB}\big(H(j\omega)\big) = 20\log(K)$
- $Arg\big(H(j\omega)\big) = Arg(K) = 0 \ car\ K \in \mathbb{R}^{+*}$

Diagramme de gain

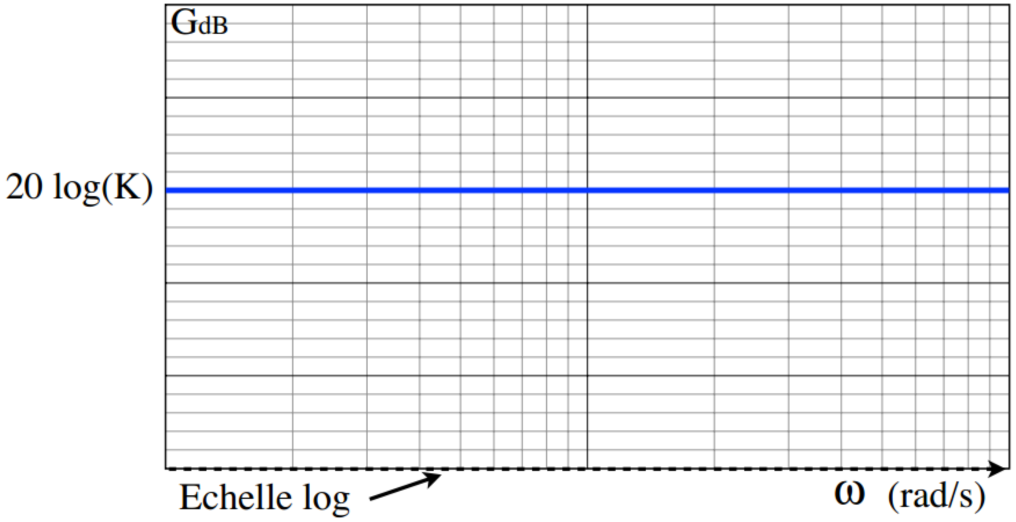
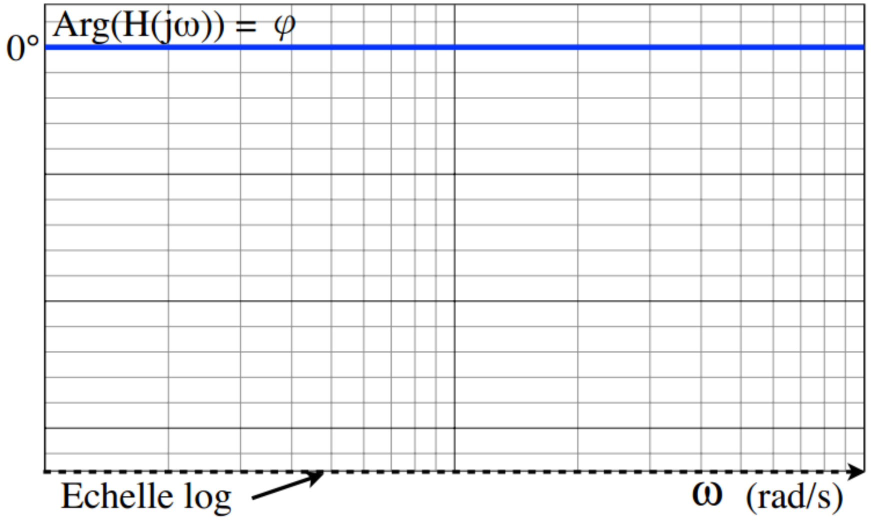


Diagramme de phase



Diagrammes de Bode

Réponses harmoniques de systèmes simples

Systèmes intégrateurs

FT → système intégrateur ($\frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$, avec K > 0) :

$$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}.$$

On a alors :

- $G_{dB}\big(H(j\omega)\big) = 20\log\left(\frac{K}{\omega}\right) = 20\log(K) - 20\log(\omega)$
- $Arg\big(H(j\omega)\big) = Arg(K) - Arg(j\omega) = -90°$

Diagrammes de Bode

Réponses harmoniques de systèmes simples

Systèmes intégrateurs

- $G_{dB}\big(H(j\omega)\big) = 20\log\left(\frac{K}{\omega}\right) = 20\log(K) - 20\log(\omega)$
- $Arg\big(H(j\omega)\big) = Arg(K) - Arg(j\omega) = -90°$

L'évolution du module est donc **une droite de pente *-20dB/décade***, tandis que la phase est constante à -90°.

Diagramme de gain

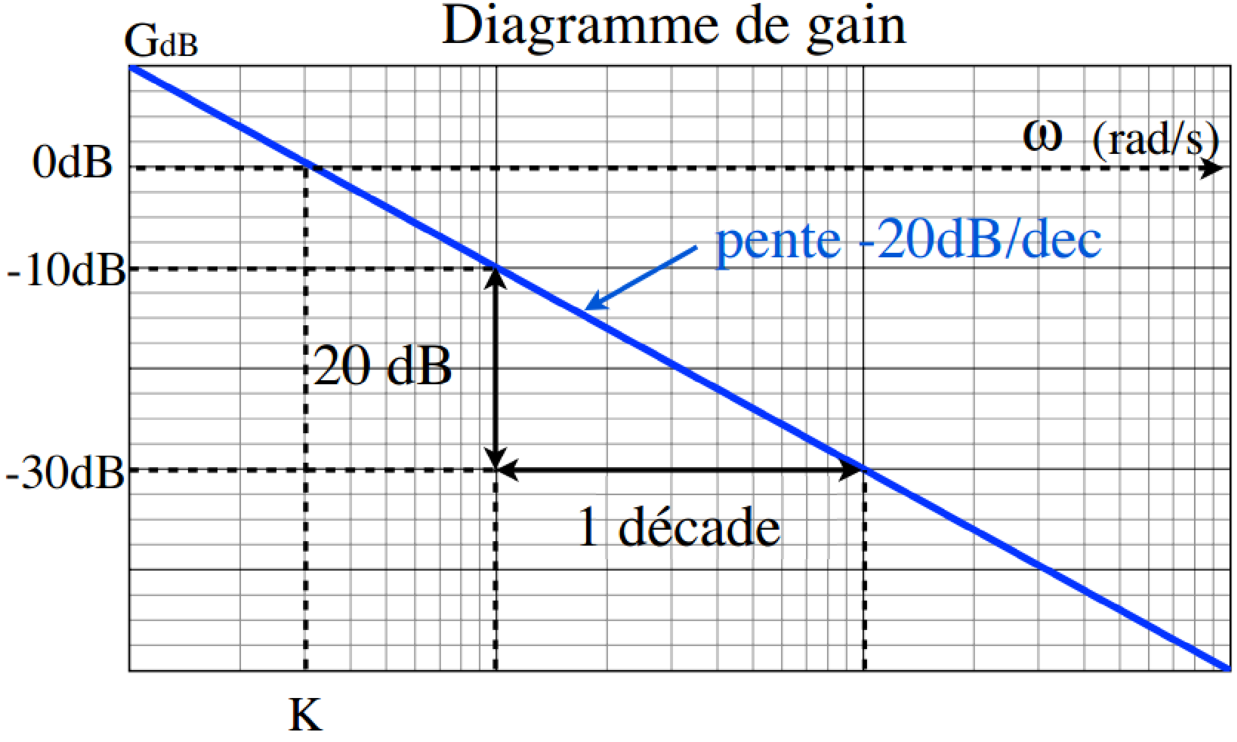
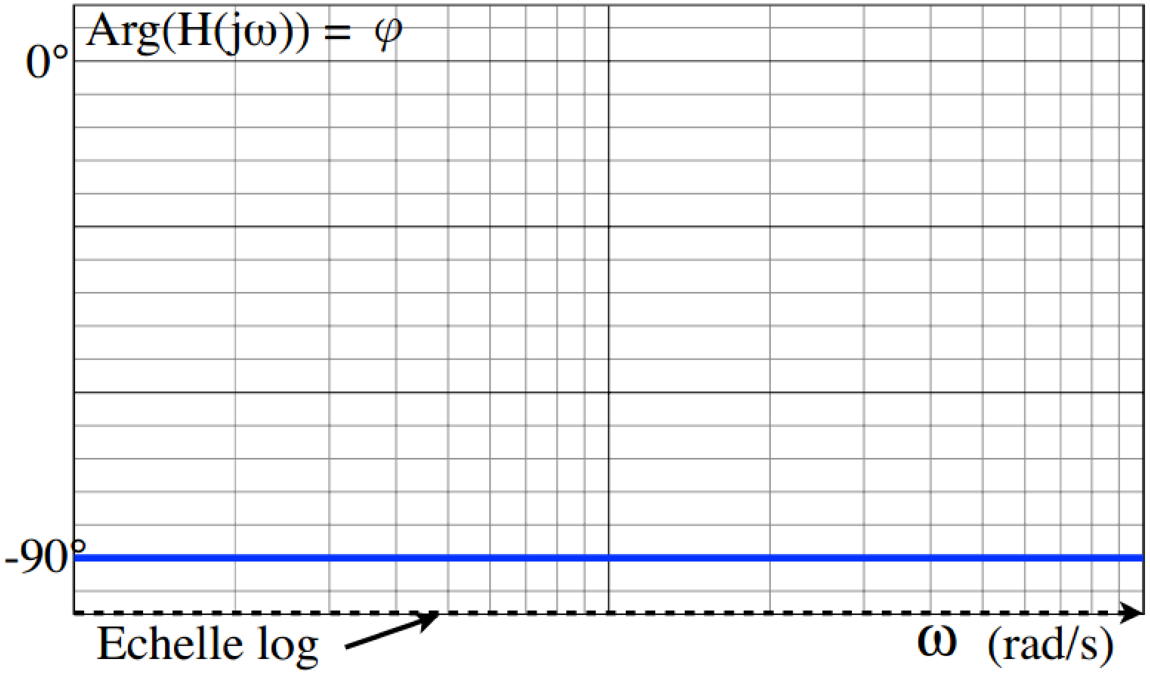


Diagramme de phase



Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du premier ordre

Tracé asymptotique

FT → système du premier ordre ($\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$) :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad avec\ \omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

→ Gain (décibels) :

$$G_{dB}\big(H(j\omega)\big) = 20\log(|H(j\omega)|) = 20\log\left(\frac{K}{\sqrt{1^2 + \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}}\right) = 20\log(K) - 20\log\left(\sqrt{1^2 + \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}\right)$$

→ Phase (degrés) :

$$\varphi(\omega) = Arg\big(H(j\omega)\big) = -Arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = [-\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)]$$

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du premier ordre

Tracé asymptotique

Lieu des asymptotes : diagramme de gain

- Pour $\boldsymbol{\omega \ll \omega_0}$:

$$G_{dB}\big(H(j\omega)\big) \cong \mathbf{20\log(K)}$$

Car :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \ll 1, donc\ 20\log\left(\sqrt{1^2+\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}\right) \cong 20log(1) \cong 0$$

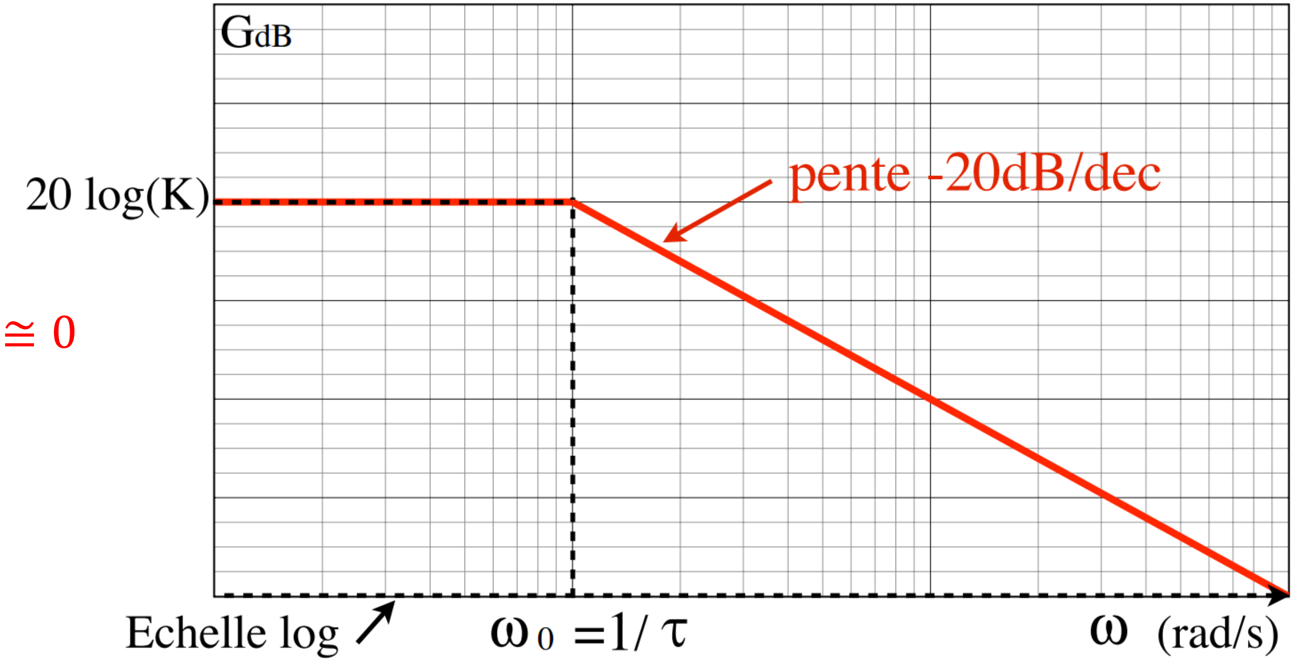
- Pour $\boldsymbol{\omega \gg \omega_0}$:

$$G_{dB}\big(H(j\omega)\big) \cong \mathbf{20\log(K) - 20log(\frac{\omega}{\omega_0})}$$

Car :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \gg 1, donc\ 20\log\left(\sqrt{1^2+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) \cong 20log\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) = 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Diagramme asymptotique du gain



Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du premier ordre

Tracé asymptotique

Lieu des asymptotes : diagramme de phase

- Pour $\omega \ll \omega_0$:

$$Arg(H(j\omega)) \cong 0°$$

Car :

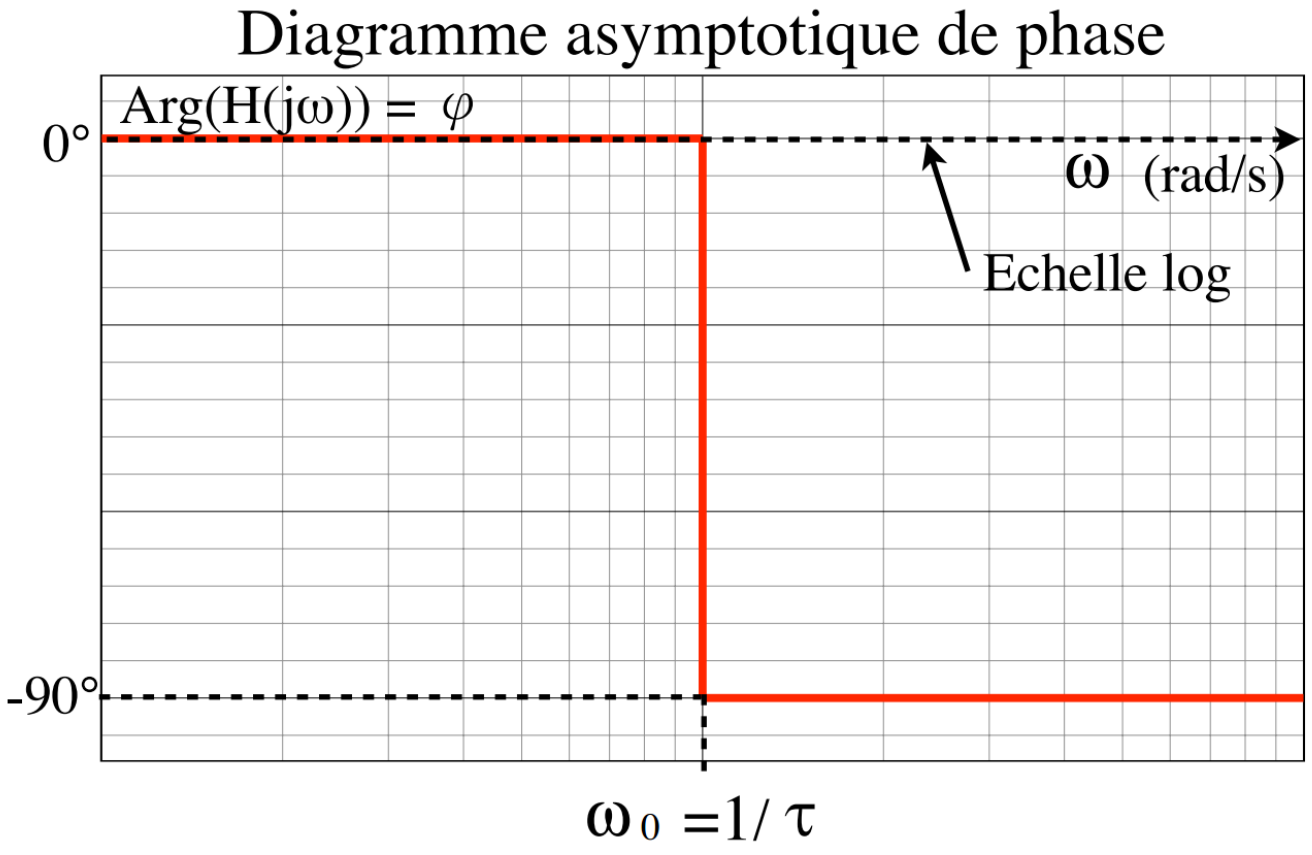
$$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1, donc\ Arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \cong Arg(1) = 0°$$

- Pour $\omega \gg \omega_0$:

$$Arg(H(j\omega)) \cong -90°$$

Car :

$$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1, donc\ Arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \cong Arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 90°$$



Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du premier ordre

Tracé asymptotique

Tracé réel :

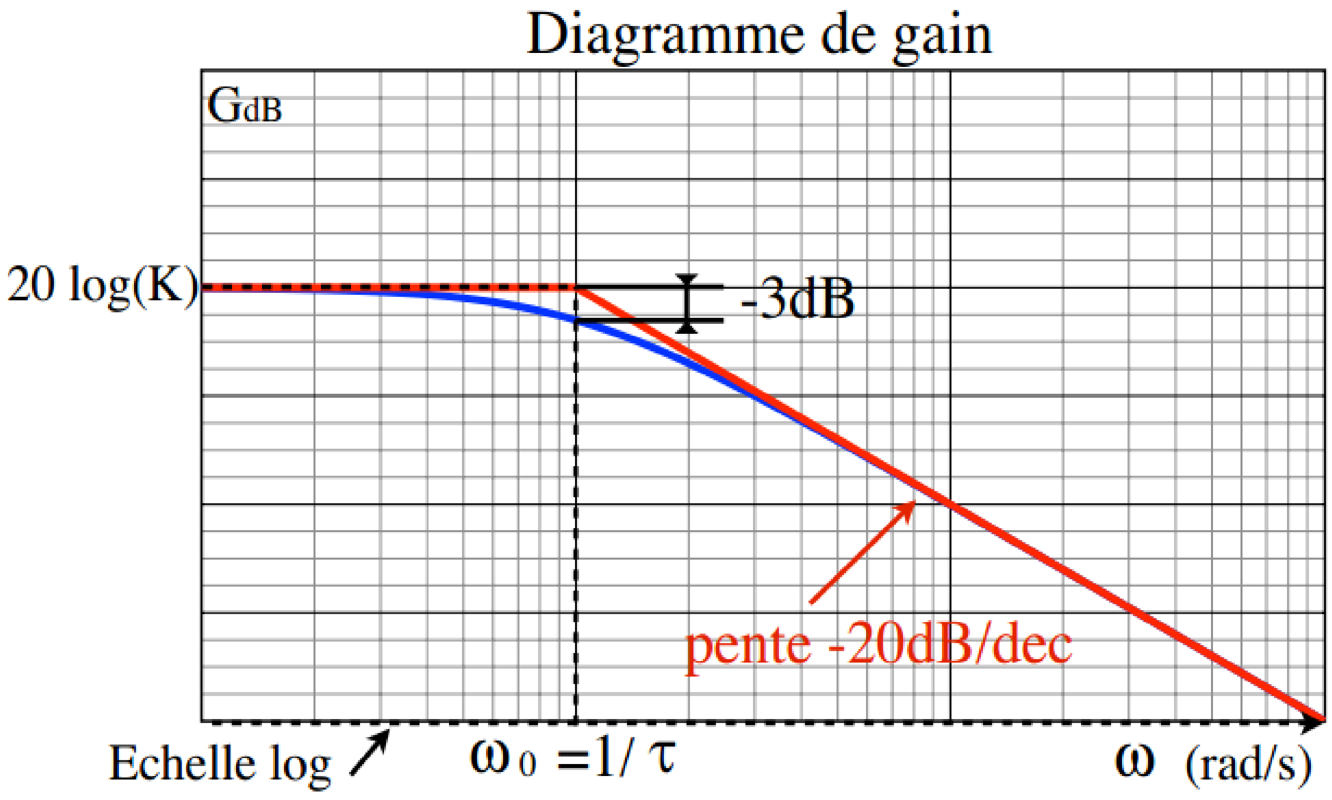
Propriétés des courbes réelles :

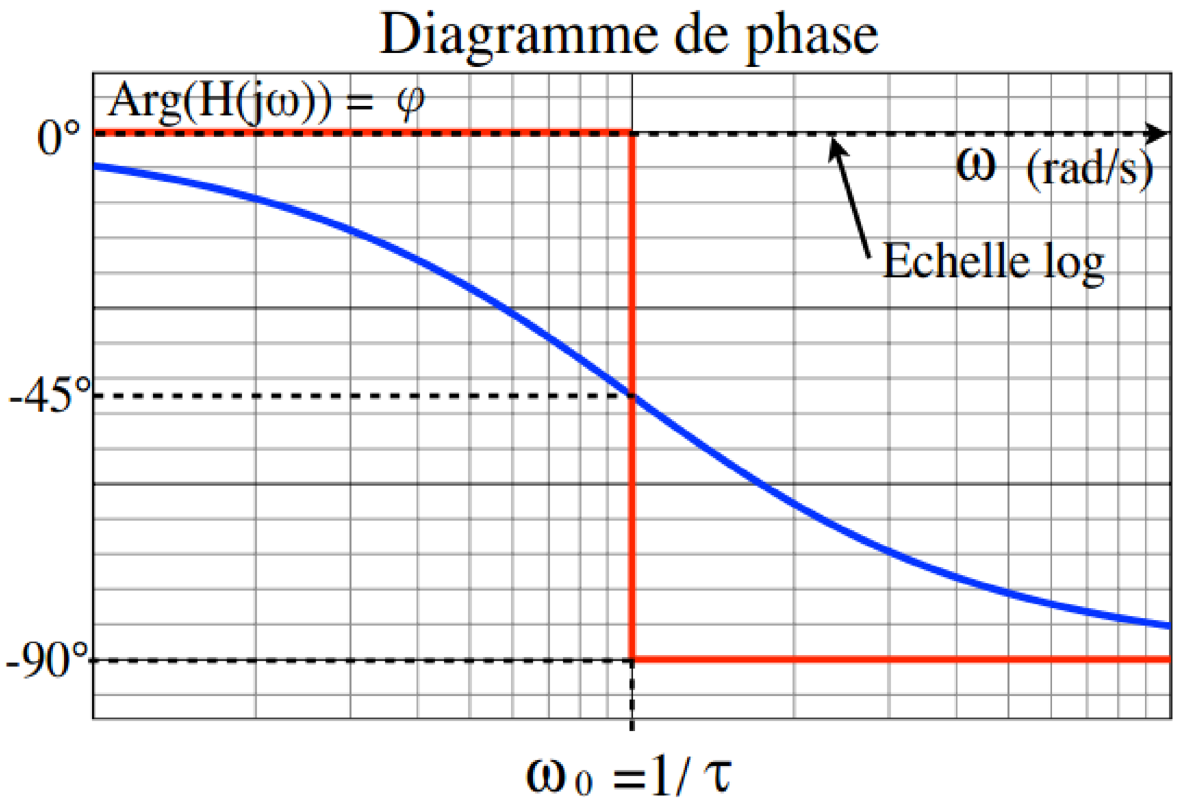
- Gain G_{dB} → strictement décroissant (*log* est strictement croissante)
- Phase $Arg\big(H(j\omega)\big) = \varphi$ → strictement décroissante
- en ω_0 → Gain → $G_{dB}\big(H(j\omega)\big) = 20\log(K) - 20\log\big(\sqrt{2}\big) \cong 20\log(K) - 3dB$
- en ω_0 → Phase → $Arg\big(H(j\omega)\big) = \varphi = -45°$

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d’un système du premier ordre

Tracé asymptotique





Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du premier ordre

Méthodologie de tracé

5 étapes :

- Expression → Gain (décibels) + Phase (degrés) de la FT
- Direction des asymptotes : $\omega \rightarrow 0$ (ou $\omega \ll \omega_0$) + $\omega \rightarrow +\infty$ (ou $\omega >> \omega_0$)
  → Gain + Phase
- Lieu de l'intersection des asymptotes pour le gain ($\omega = \omega_0 = \frac{1}{\tau}$)
- Tracé des asymptotes sur le diagramme
- Tracé réel approximatif en s'aidant des asymptotes

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

FT d'un système du second ordre :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Premier cas : z > 1

Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1+\tau_1 j\omega)(1+\tau_2 j\omega)}$$

Avec :

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)} \quad et \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_0\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)} \quad (\tau_2 < \tau_1)$$

FT → produit de deux 1er ordres.

→ Sommer les tracés asymptotiques pour obtenir le tracé asymptotique complet.

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Premier cas : z > 1

Gain :

$$G_{dB} = 20\log(K) - 20\log\left(\sqrt{1+{\tau_1}^2\omega^2}\right) - 20\log\left(\sqrt{1+{\tau_2}^2\omega^2}\right)$$

Phase :

$$\varphi = -Arg(1+j\tau_1\omega) - \mathrm{Arg}(1+j\tau_2\omega)$$

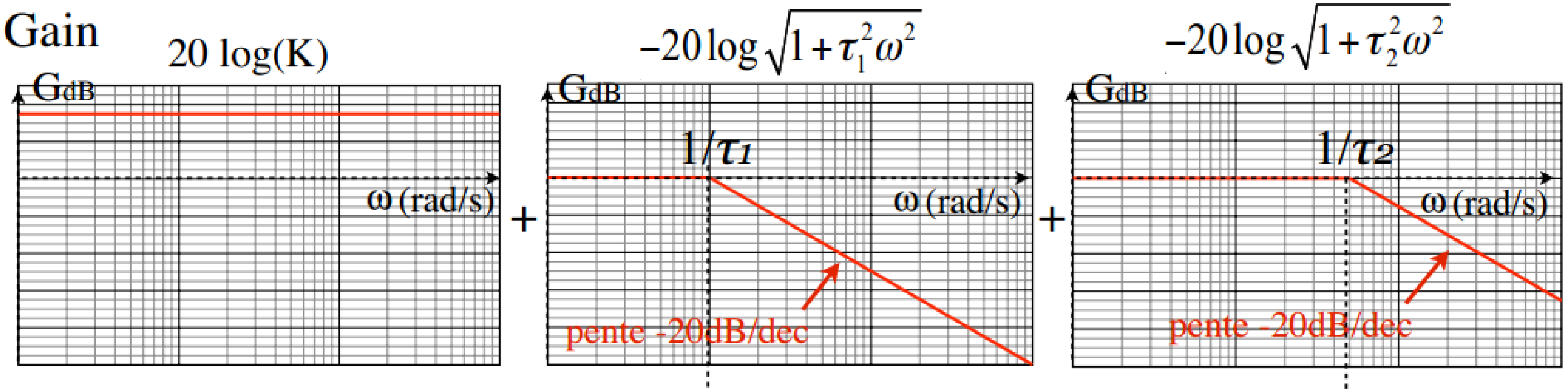
Diagrammes de Bode

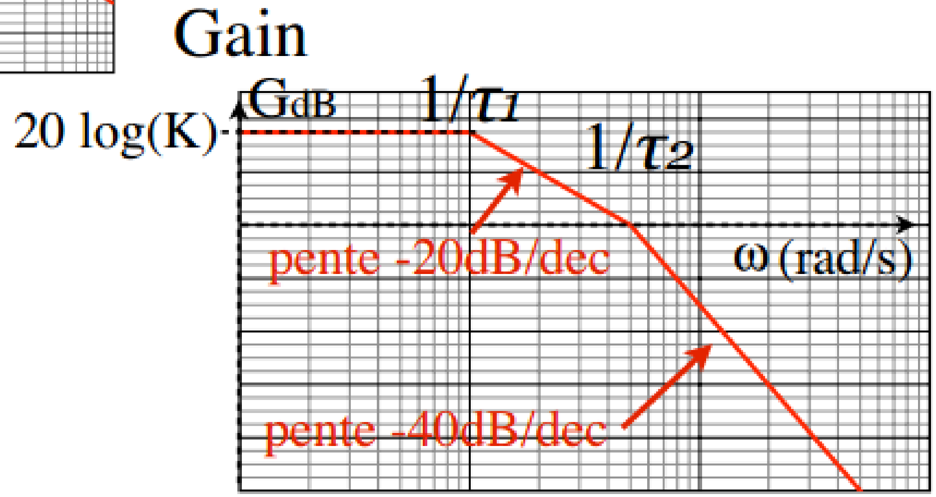
Réponse harmoniques d’un système du second ordre

Premier cas : z > 1

Tracé asymptotique :

$$G_{dB} = 20\log(K) - 20\log\left(\sqrt{1+{\tau_1}^2\omega^2}\right) - 20\log\left(\sqrt{1+{\tau_2}^2\omega^2}\right)$$





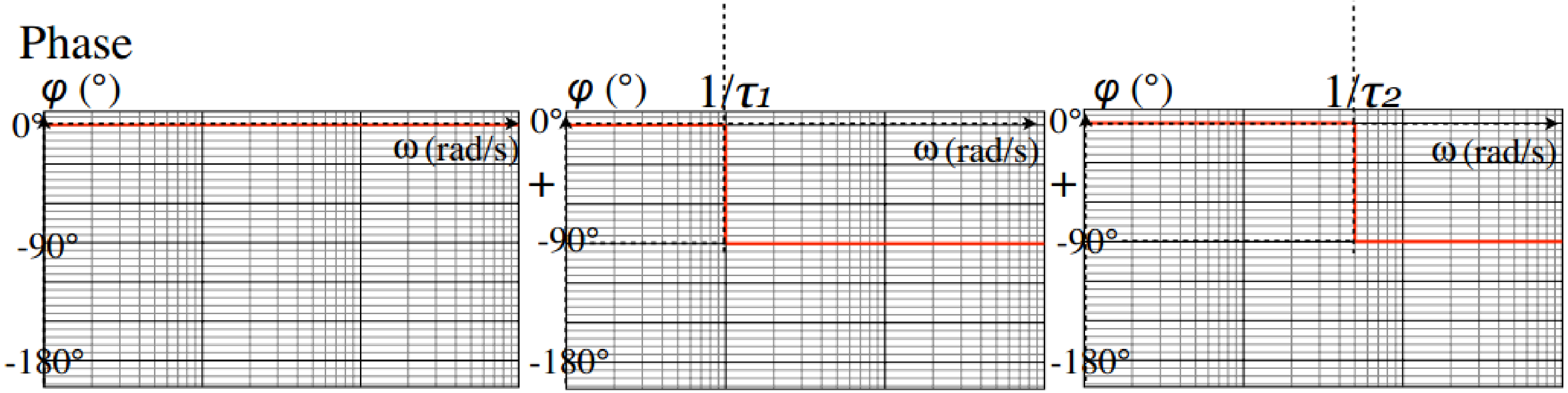
Diagrammes de Bode

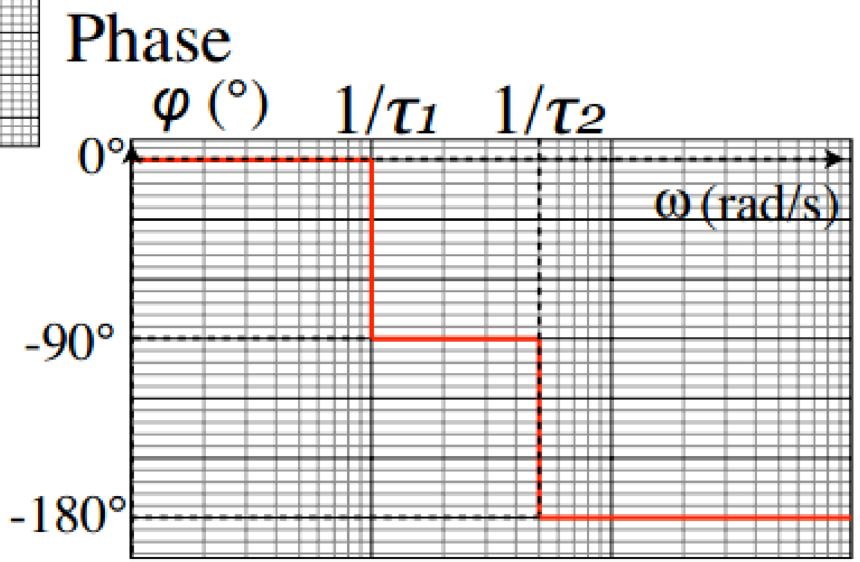
Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Premier cas : z > 1

$$\varphi = -Arg(1 + j\tau_1\omega) - \mathrm{Arg}(1 + j\tau_2\omega)$$

Tracé asymptotique :





Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Deuxième cas : z = 1

Si z = 1 → FT :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} j\omega + (\frac{j\omega}{\omega_0})^2} = \frac{K}{(1 + j\,\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

Par la même méthode que dans le cas précédent, si $\tau_1 = \tau_2$, on a :

Diagramme asymptotique du gain

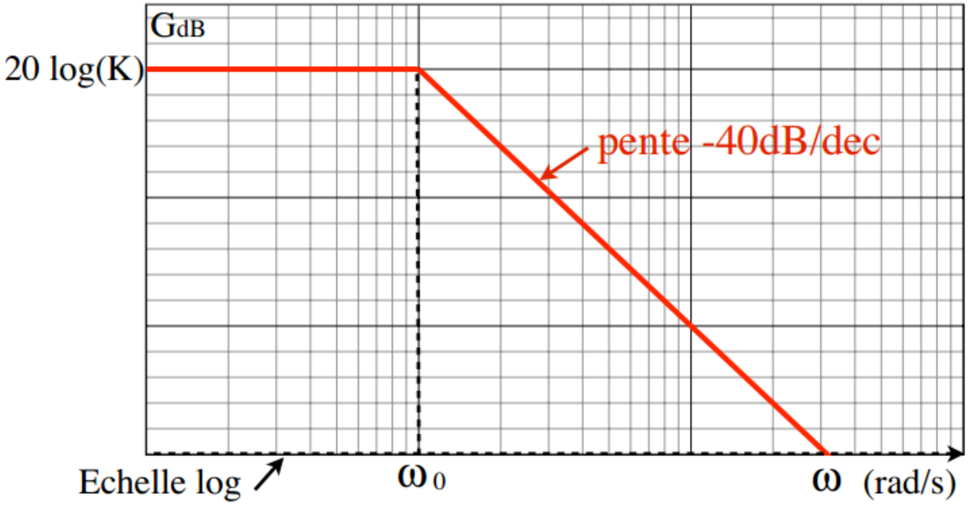
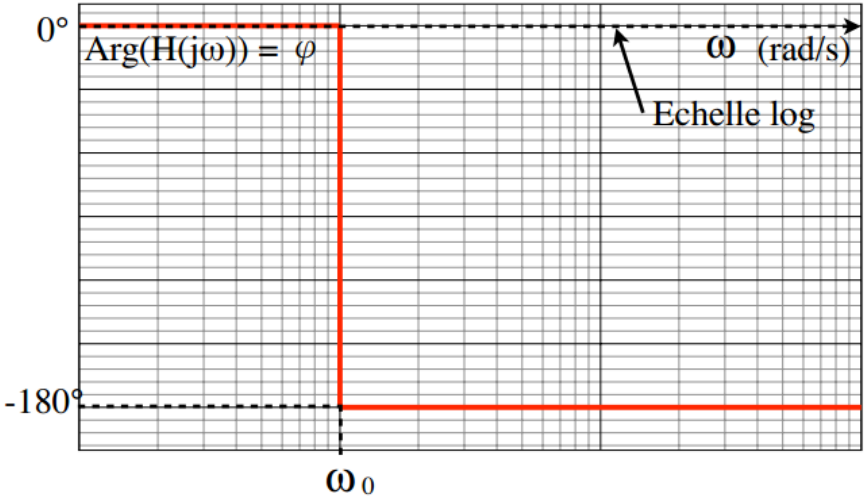


Diagramme de phase



Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Troisième cas : z < 1

Il n'existe pas de racines réelles pour le dénominateur → FT :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} j\omega - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

Module de $H(j\omega)$:

$$|H(j\omega)| = \frac{|K|}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{2z}{\omega_0}\omega)^2}}$$

Phase :

$$\varphi = Arg\big(H(j\omega)\big) = -Arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\omega\,\frac{2z}{\omega_0}\right)$$

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Troisième cas : z < 1

Lieu des asymptotes : diagramme de gain

- Pour $\boldsymbol{\omega} \ll \boldsymbol{\omega_0}$:

$$G_{dB} = 20log(|H(j\omega)|) \cong 20\log(|K|) \ \ (asymptote\ horizontale)$$

Car :

$$(\frac{\omega}{\omega_0})^2 \ll 1, donc \sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{2z}{\omega_0}\omega)^2} \cong 1$$

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Troisième cas : z < 1

Lieu des asymptotes : diagramme de gain

- Pour $\boldsymbol{\omega \gg \omega_0}$:

$$\boldsymbol{G_{dB} = 20log(|H(j\omega)|) \cong 20\log(|K|) + 40log(\omega_0) - 40log(\omega)}$$
$$(pente\ de - 40dB/décade)$$

Car :

$$(\frac{\omega}{\omega_0})^2 \gg 1, donc\ \sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{2z}{\omega_0}\omega)^2} \cong \sqrt{(\frac{\omega}{\omega_0})^4 + (\frac{2z}{\omega_0}\omega)^2} \cong (\frac{\omega}{\omega_0})^2$$

- Les deux asymptotes se coupent en $\omega = \omega_0$

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Troisième cas : z < 1

Lieu des asymptotes : **diagramme de phase**

- Pour $\boldsymbol{\omega} \ll \boldsymbol{\omega_0}$:

$$\boldsymbol{\varphi} = -Arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\omega\,\frac{2z}{\omega_0}\right) \cong \mathbf{0°}$$

- Pour $\boldsymbol{\omega} \gg \boldsymbol{\omega_0}$:

$$\boldsymbol{\varphi} = -Arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\omega\,\frac{2z}{\omega_0}\right) \cong \mathbf{-180°}$$

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Troisième cas : z < 1

Lieu des asymptotes : diagramme de phase

- En $\boldsymbol{\omega = \omega_0}$:

$$\boldsymbol{\varphi} = -Arg\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\omega\,\frac{2z}{\omega_0}\right) = \mathbf{-90°}$$

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Troisième cas : $z < 1$

Tracé réel :

Tracé réel → variations de la phase et du gain → Calcul → dérivée première du gain et de la phase.

- Pour la phase :

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{-f'(\omega)}{1 + f(\omega)^2} \quad avec \quad f(\omega) = \frac{2z\omega_0\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

La dérivée est donc du signe de $-f'(\omega)$. On a :

$$-f'(\omega) = \frac{2z\omega_0\left(\omega_0^2 + \omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} > 0 \; donc \; \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} < 0$$

La phase est donc strictement décroissante

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d’un système du second ordre

Troisième cas : z < 1

Tracé réel :

- Pour le gain :

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = \frac{-K[-\frac{1}{2}(2(-\frac{2\omega}{{\omega_0}^2})(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2)+\frac{4z^2}{{\omega_0}^2}2\omega)]}{[(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2+(\frac{2z}{\omega_0}\omega)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = \frac{2K\frac{\omega}{{\omega_0}^2}[2z^2-1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2]}{[(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2+(\frac{2z}{\omega_0}\omega)^2]^{3/2}}$$

La dérivée peut donc s’annuler pour $\boldsymbol{\omega_r} = \boldsymbol{\omega_0\sqrt{1-2z^2}}$ dans le cas où $\boldsymbol{z} < \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,7}$.

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Troisième cas : z < 1

Tracé réel :

- Si $z > \frac{1}{\sqrt{2}}$ → dérivée strictement négative → gain strictement décroissant.
- Si $z < \frac{1}{\sqrt{2}}$ → maximum local en $\omega = \omega_r$.

→ Facteur de résonance (ou facteur de surtension) → mesure le dépassement du gain en $\omega = \omega_r$ par rapport à son asymptote horizontale :

$$Q_r = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(j\omega)_{\omega\to 0}|} = \frac{\frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}}{K} = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$$ ou encore $$\boldsymbol{G_{dB}(\omega_r) = 20log\left(\frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}\right)}$$

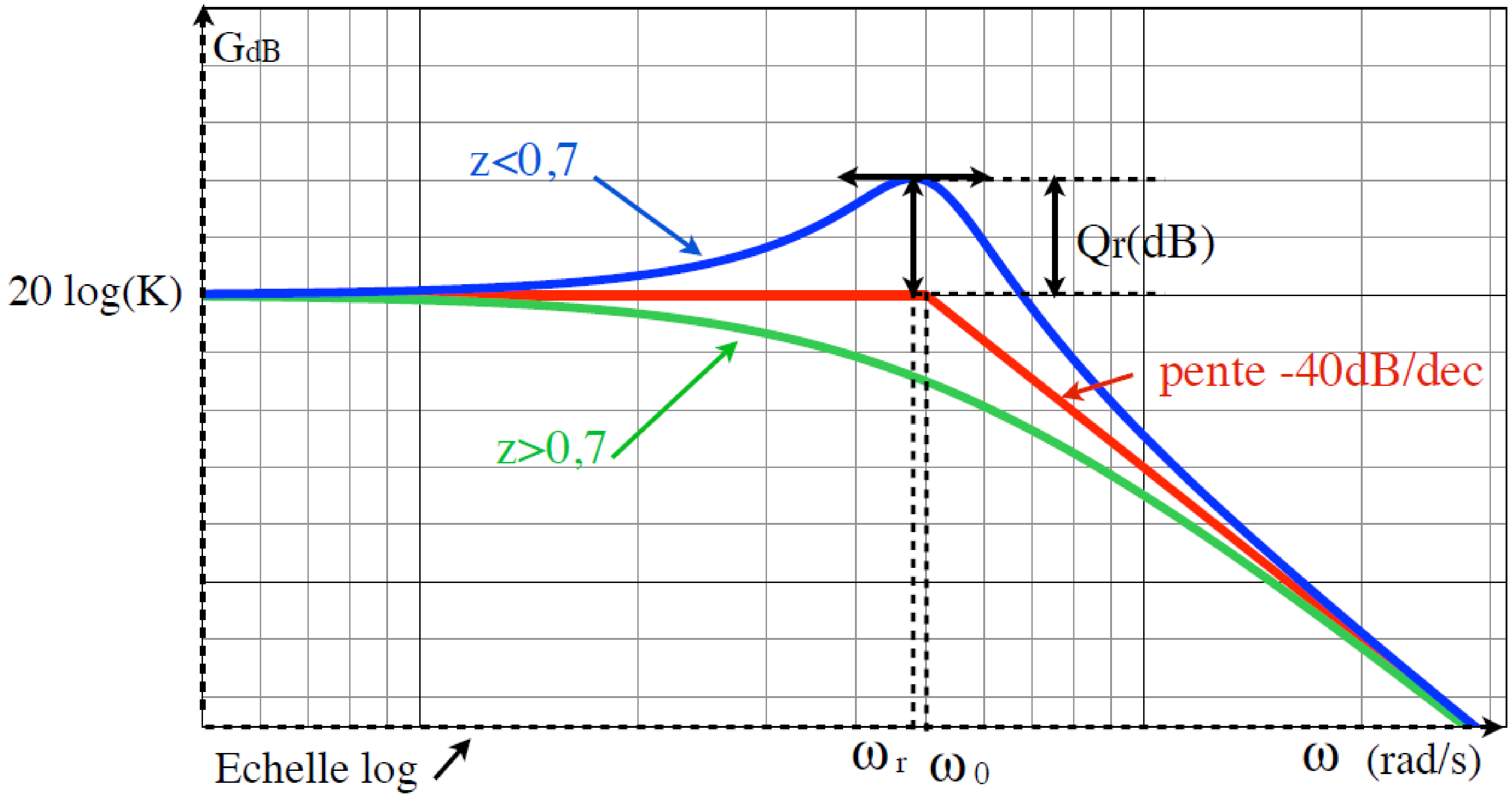
Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Troisième cas : z < 1

Tracé réel :

Diagramme de gain

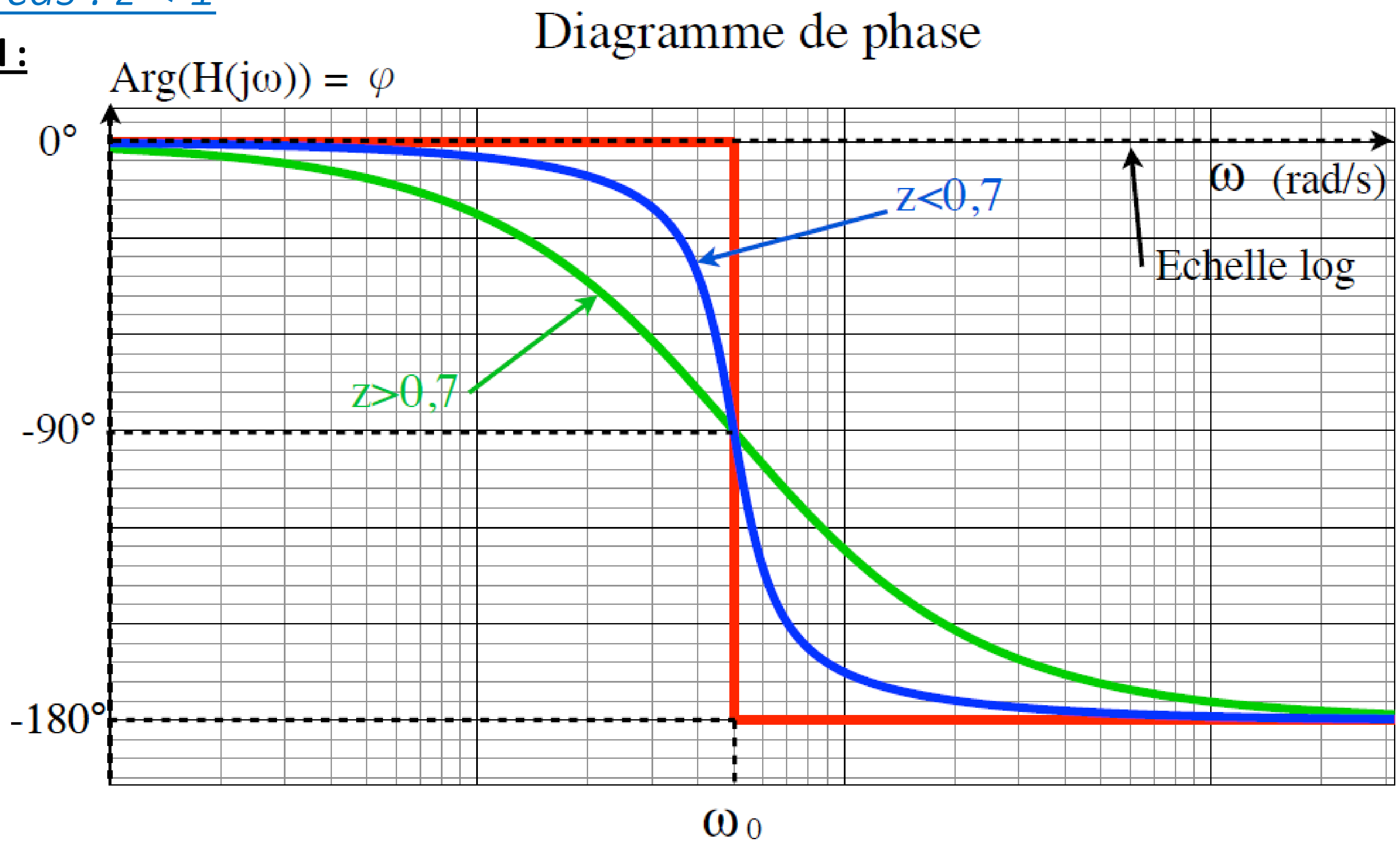


Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Troisième cas : z < 1

Tracé réel :



Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Identification

Identification de la FT d'un ordre 2 :

- Basses fréquences → trouver le gain du système K
- Phase à - 90° → déterminer ω_0
- Gain en ω_0 → déterminer le coefficient d'amortissement ($\mathbf{G_{db}(\omega = \omega_0) = 20\, log\left(\frac{K}{2z}\right)}$).
  On peut également passer par le facteur de résonance, s'il existe une résonance.

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Influence de z

Diagramme de gain

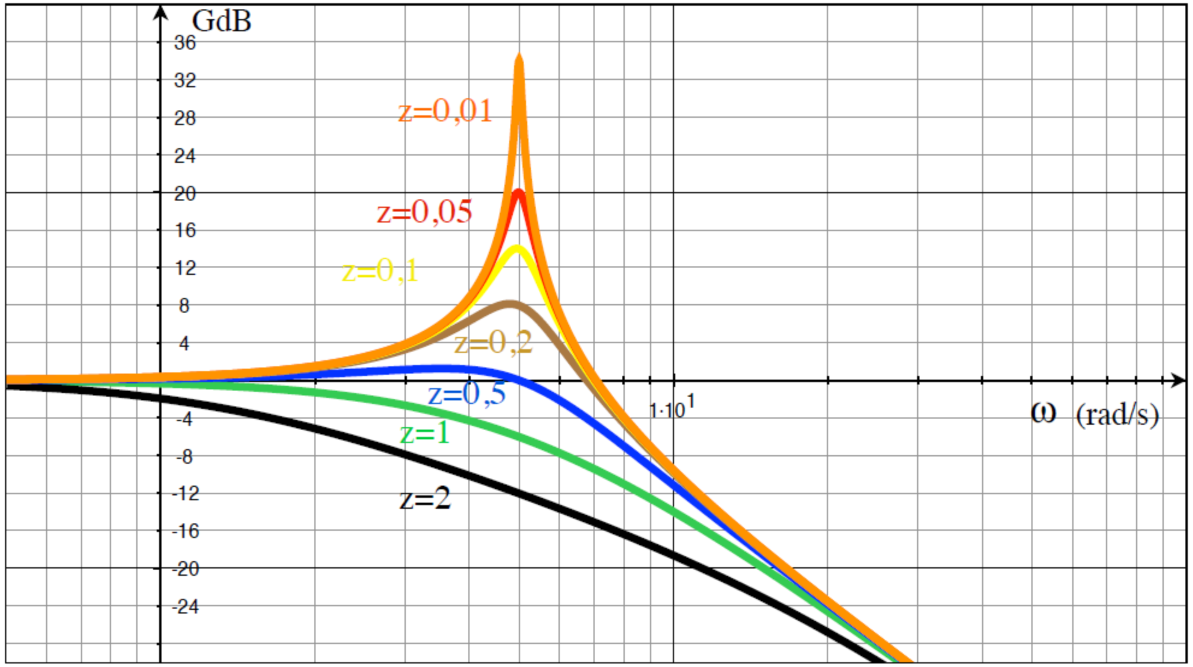
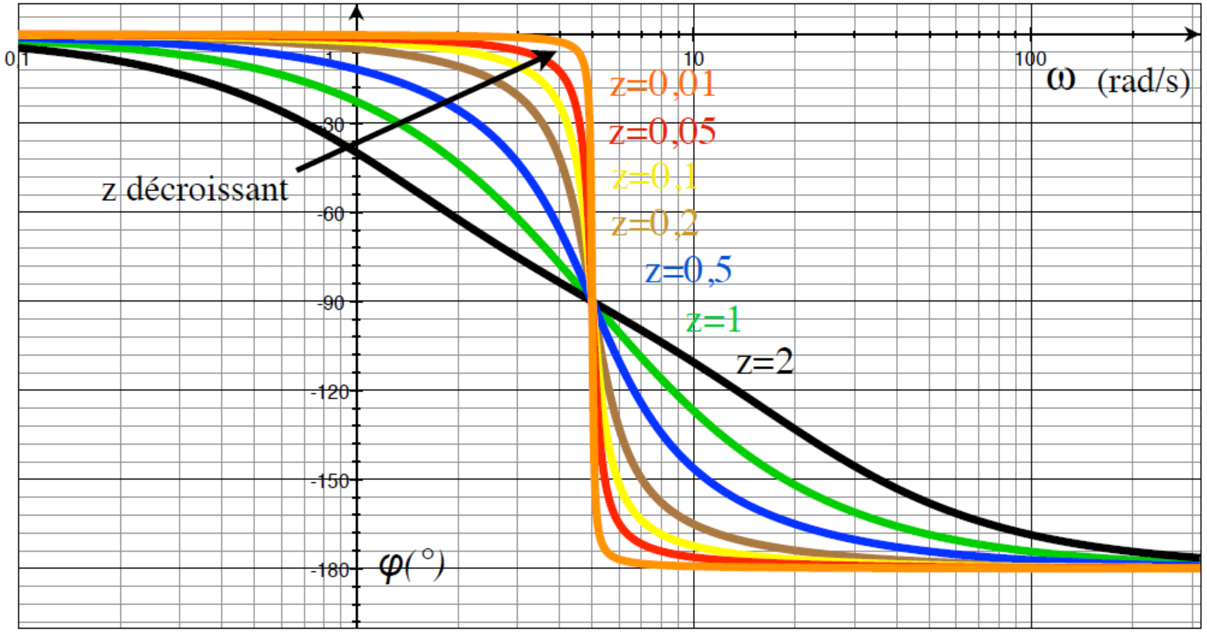


Diagramme de phase



Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

Bande Passante

Bande passante à xdB d'un système → plage de pulsations (ou de fréquences) → signal de sortie subit un affaiblissement inférieur à xdB par rapport à sa valeur pour ω = 0.

On appelle aussi bande passante la plage de pulsations (ou de fréquences) → signal de sortie subit un affaiblissement égal à sa valeur pour ω = 0 → pulsation de coupure ω_{c0}.

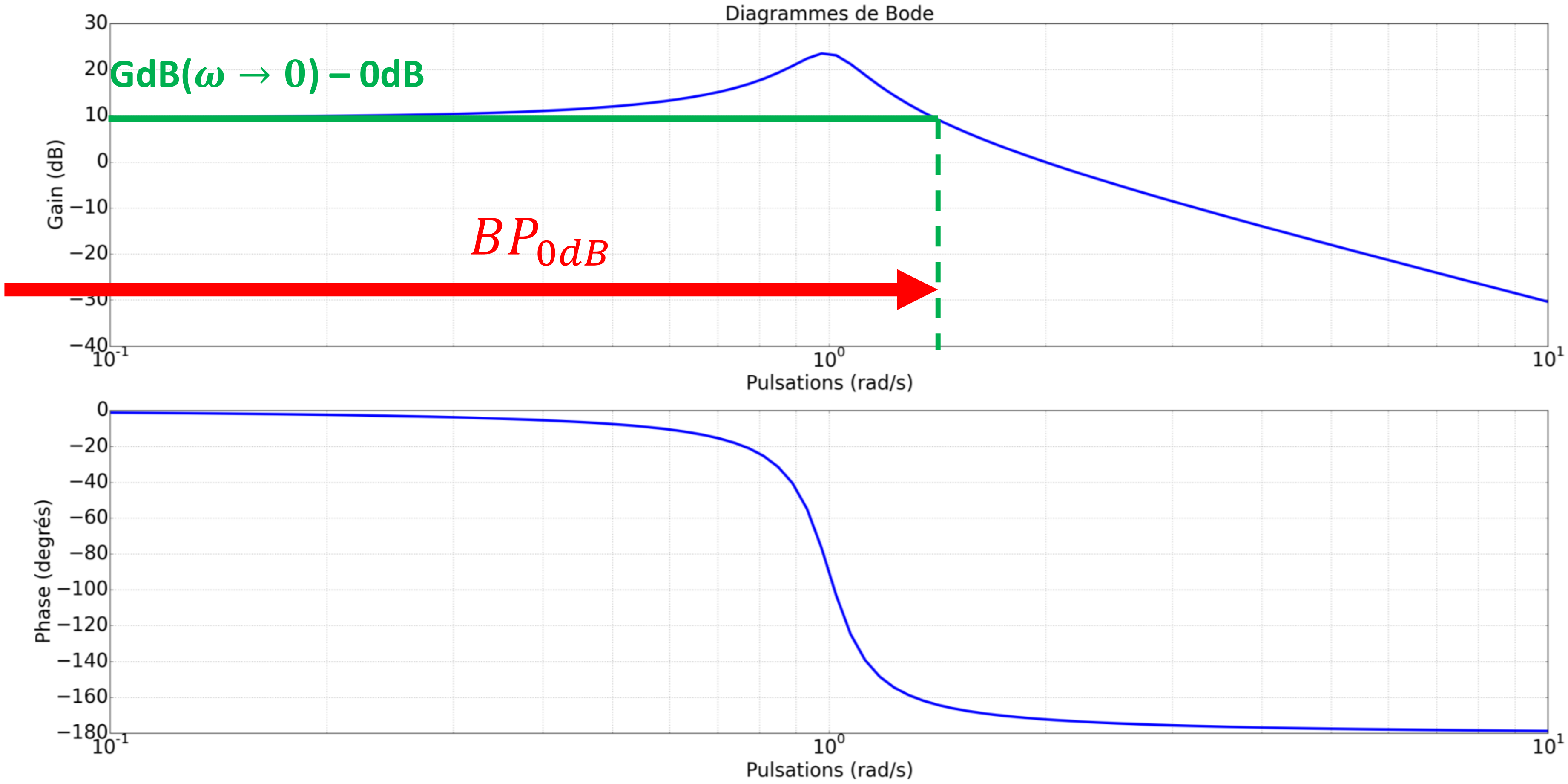
Remarque :

- BP augmente avec le gain statique K
- BP diminue quand la constante de temps τ augmente pour un premier ordre
- → si BP augmente → constante de temps diminue → système devient plus rapide

Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d'un système du second ordre

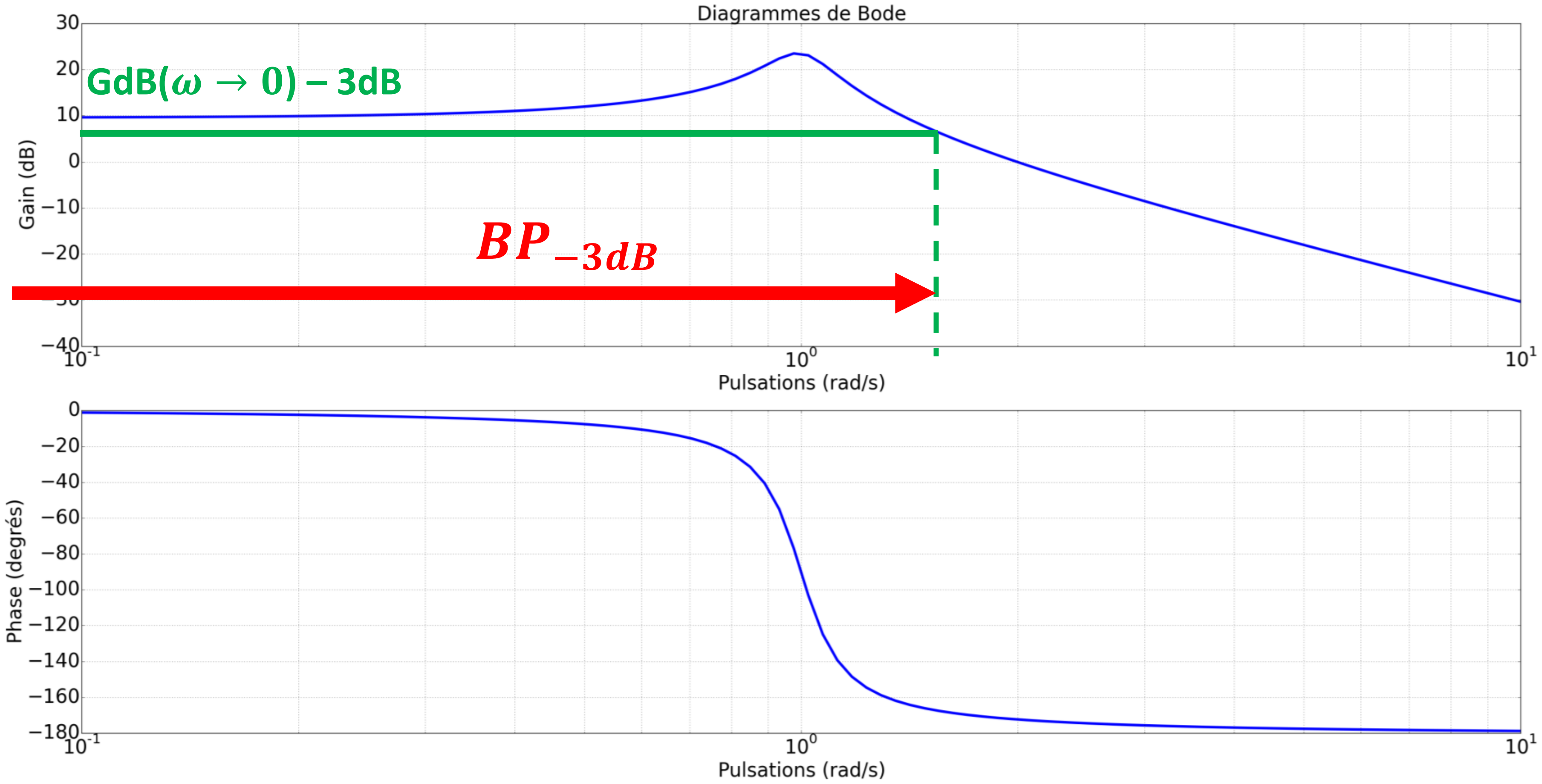
Bande Passante



Diagrammes de Bode

Réponse harmoniques d’un système du second ordre

Bande Passante



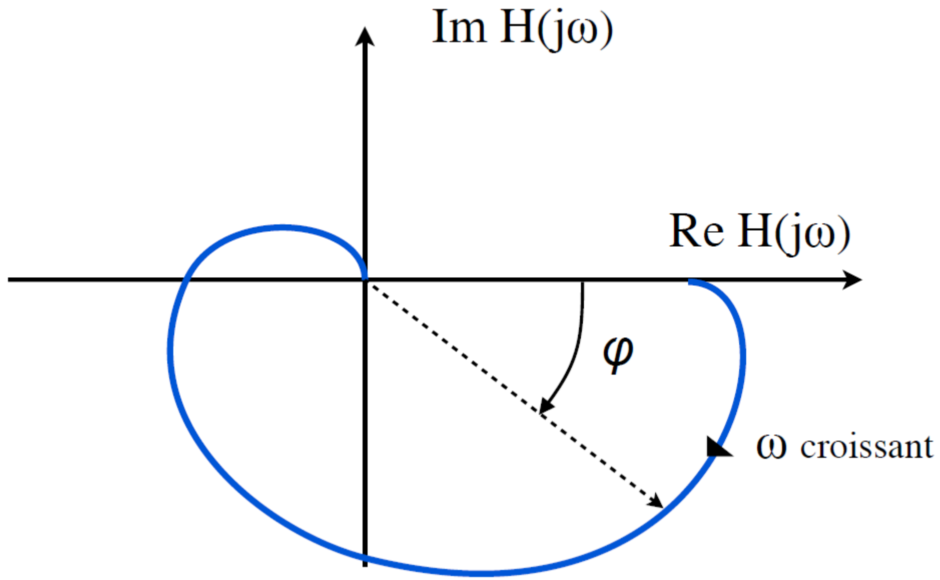
Diagrammes de Black et Nyquist

Diagramme de Nyquist

Diagramme de Niquist→ variation de la partie imaginaire de $H(j\omega)$ en fonction de sa partie réelle (norme en fonction du déphasage).

Courbe représentant $H(j\omega)$ → on fait varier ω de 0 à +∞

Flèche → sens croissant de ω



Diagrammes de Black et Nyquist

Diagramme de Black

Diagramme de Black (également appelé diagramme de Nichols) → lieu d'une FT → axe des abscisses = phase φ (degrés) + axe des ordonnées = gain G_{dB} (décibels).

Flèche → sens croissant de ω

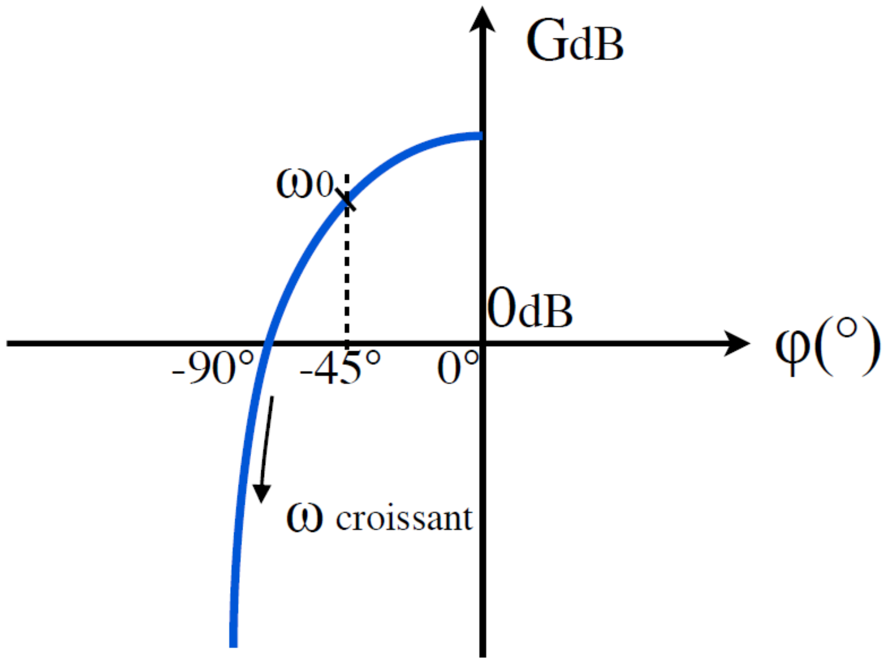
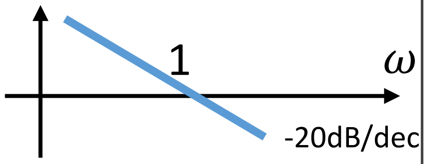
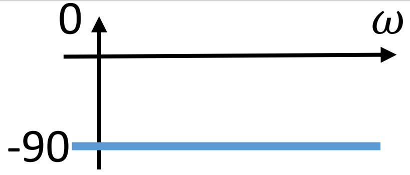
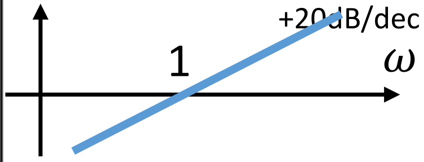
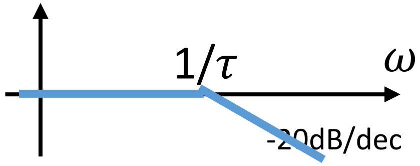
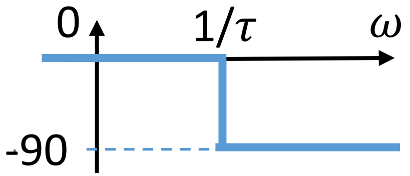
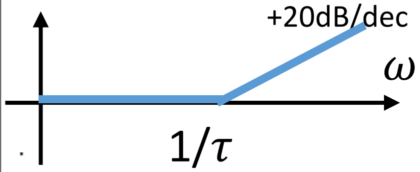
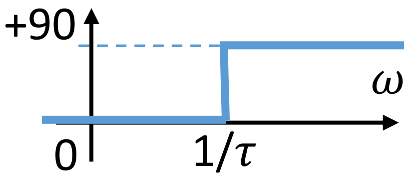
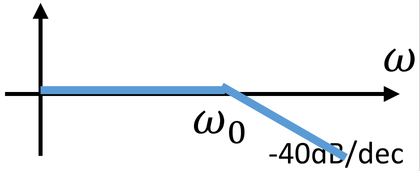
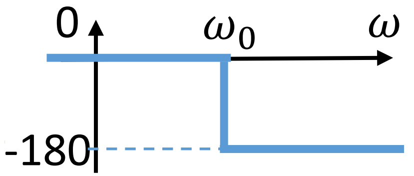
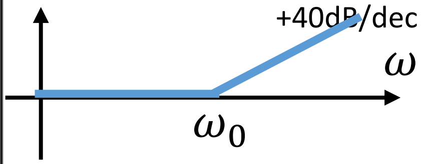
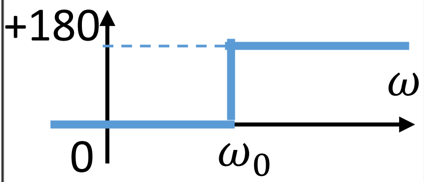


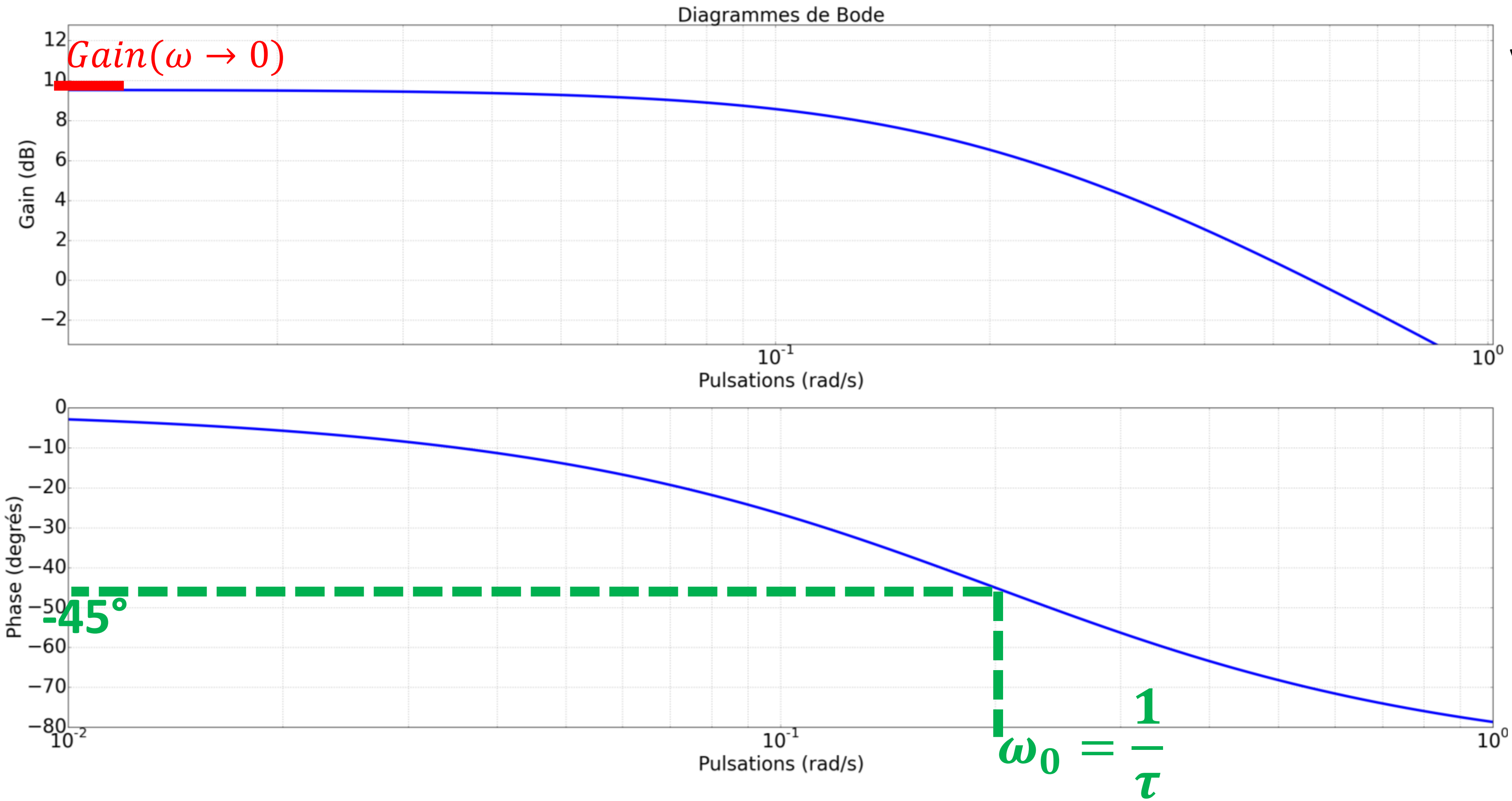
Tableau récapitulatif

<table>
<tr><th>FT</th><th>Diagramme gain</th><th>Diagramme phase</th></tr>
<tr><td>$H(p)=\frac{1}{p}$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$H(p)=p$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$H(p)=\frac{1}{1+\tau p}$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$H(p)=1+\tau p$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$H(p)=\frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2}+2\frac{\xi}{\omega_0}p+1}$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$H(p)=\frac{p^2}{\omega_0^2}+2\frac{\xi}{\omega_0}p+1$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Méthode de détermination graphique des paramètres d'une FT

Système du premier ordre

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$



Valeur finale de la phase = **-90°**

Détermination de K :

- $20log(K) = Gain\ (\omega \to 0)$

$donc\ K = 10^{\frac{Gain(\omega \to 0)}{20}}$

Détermination de τ :

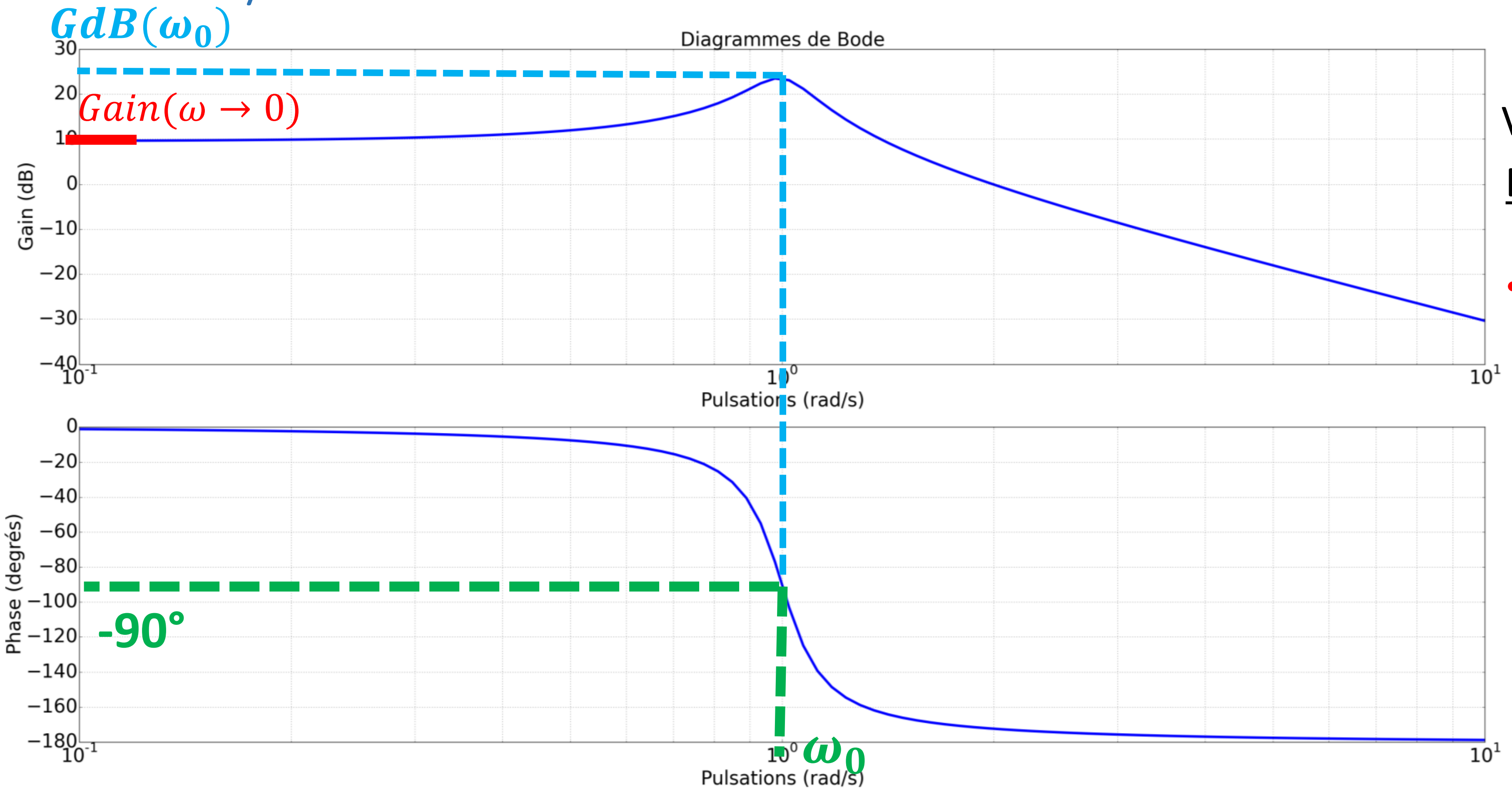
- **Abscisse de la Phase à -45°**

$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$

Méthode de détermination graphique des paramètres d'une FT

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Système du second ordre



Valeur finale de la phase = **-180°**

Détermination de K :

- $20log(K) = Gain\ (\omega \to 0)$

$donc\ K = 10^{\frac{Gain(\omega \to 0)}{20}}$

Détermination de ω_0 :

- **Abscisse de la Phase à -90°**

Détermination de z (après ω_0) :

- $Gdb(\omega_0) = 20\ log\left(\frac{K}{2z}\right)$

Formule valable quelque soit la valeur de z

Tracé de diagramme de Bode sous Python

```
import scipy.signal as sgn
```

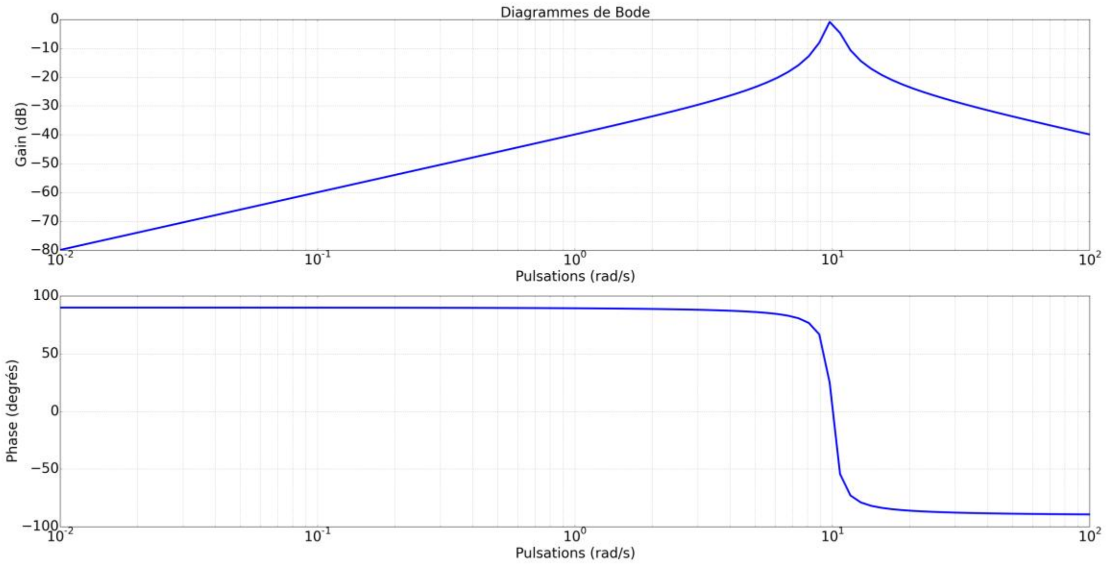
→ Permet de définir une FT (Numérateur + Dénominateur)

$$H(j\omega) = \frac{0.01.j\omega}{1 + 0.01.j\omega + 0.01.(j\omega)^2}$$

```
num = np.poly1d([0.01,0])
den = np.poly1d([0.01,0.01,1])
H=sgn.lti(num,den)
```

```
(listew,listegain,listephase)= sgn.bode(H)
```

→ Tulpe : Liste des pulsations , Liste des gains (dB) , Liste des phases (degrés)



Liste de pulsations → déterminée automatiquement
(pour faire apparaître les éléments caractéristiques de la FT)

Tracé de diagramme de Bode sous Python

```
import scipy.signal as sgn
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

listez = [0.2,1,2]
plt.figure(1)
for z in listez:
    num = np.poly1d([1])
    den = np.poly1d([1,2*z,1])
    H = sgn.lti(num,den)
    (listew,listegain,listephase)= sgn.bode(H)
    plt.subplot(2,1,1)
    plt.plot(listew,listegain,label="z= " +str(z), linewidth=4)
    plt.subplot(2,1,2)
    plt.plot(listew,listephase,label="z= " +str(z), linewidth=4)
plt.subplot(2,1,1)
plt.xscale('log',size=30)
plt.xlabel('Pulsations (rad/s)',size=30)
plt.ylabel('Gain (dB)',size=30)
plt.legend(fontsize=30)
plt.grid(which="both")
plt.tick_params(axis = 'both', labelsize = 30)
plt.title('Diagrammes de Bode', fontsize=30)
plt.subplot(2,1,2)
plt.xscale('log',size=30)
plt.xlabel('Pulsations (rad/s)',size=30)
plt.ylabel('Phase (degrés)',size=30)
plt.legend(fontsize=30)
plt.grid(which="both")
plt.tick_params(axis = 'both', labelsize = 30)
plt.show()
```

→ Variation de z

→ Définition de la FT

→ Création de la FT

→ Tracé du diagramme de GAIN

→ Tracé du diagramme de PHASE

Tracé de diagramme de Bode sous Python